



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

**Las gráficas finitas tienen producto
simétrico único**

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICA

PRESENTA:

Adriana Porcayo Domínguez

DIRECTORES DE TESIS:

**DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO,
DR. FERNANDO OROZCO ZITLI**



TOLUCA, MÉXICO JULIO DE 2021

LAS GRÁFICAS FINITAS TIENEN PRODUCTO SIMÉTRICO ÚNICO

Adriana Porcayo Domínguez

Julio 2021

*A mis padres,
Aideé Domínguez Serna
Luis Porcayo Jardón.*

Agradecimientos

A mis padres, Luis y Aideé, por brindarme su apoyo incondicional, por confiar en mí, por su paciencia y por estar siempre en los momentos más importantes de mi vida. Este logro se los debo a ustedes, muchas gracias por sus miles de canciones.

A mis hermanos Bety, César y Eve, por ser mis compañeros de vida, por su cariño e inspirarme a seguir adelante.

Al Dr. Enrique Castañeda Alvarado, mi asesor de tesis, y al Dr. Fernando Orozco Zitli, coasesor de tesis, por brindarme su apoyo y asesorarme para la realización de este trabajo.

De igual manera al Dr. David Maya Escudero y al Dr. José Antonio Martínez Cortez, revisores de este trabajo, por su accesibilidad, por las observaciones, comentarios y sugerencias para enriquecimiento de este trabajo de tesis.

A mis amigos, por apoyarme, por cada momento divertido compartido.

Introducción

Un continuo es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Una gráfica finita es un continuo que puede ser escrito como la unión de un número finito de arcos, tales que cada dos de ellos son disjuntos o se intersectan sólo en uno o ambos puntos finales. Algunas gráficas finitas típicas son: el intervalo $[0, 1]$, la circunferencia y los n -odos simples. Los hiperespacios de un continuo son familias de subconjuntos del continuo con alguna característica en particular. Dado un continuo X consideremos los siguientes hiperespacios:

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\} (n \in \mathbb{N}), \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\} (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

Es sabido que si dos continuos X y Y son homeomorfos, entonces cada uno de los hiperespacios de X son homeomorfos a los correspondientes hiperespacios de Y . Varios autores se han interesado y han estudiado un problema natural dentro de esta área, el cual consiste en determinar cuando la implicación puede ser invertida. Es decir, supongamos que X es un continuo y $H(X)$ representa alguno de los hiperespacios $2^X, C(X), C_n(X)$ y $F_n(X)$ entonces bajo qué condiciones podemos afirmar lo siguiente: $H(X)$ y $H(Y)$ son homeomorfos implica que X y Y son homeomorfos. Se han encontrado y dado algunos contraejemplos, mostrando que esta implicación no siempre es cierta.

En este trabajo nos enfocaremos en el hiperespacio $F_n(X)$, este espacio es conocido como n -ésimo producto simétrico de X .

Se sabe que los continuos pertenecientes a una de las siguientes clases tienen

hiperespacio único $C(X)$:

- a) Gráficas finitas diferentes de un arco o de una curva cerrada simple (Ver [1] y [6]).
 - b) Continuos hereditariamente indescomponibles, por ejemplo, el pseudo-arcos (Ver [1]).
 - c) Los continuos indescomponibles tales que todo subcontinuo no degenerado propio son arcos, por ejemplo, el arcoiris de Knaster (Ver [10]).
 - d) Compactación métrica del rayo $[0, \infty)$ con residuo no degenerado (Ver [1]).
- Una línea de investigación estrictamente relacionadas con este problema es la correspondiente a continuos C -determinados.

Se dice que el continuo X tiene hiperespacio único $C(X)$ siempre que si Y es un continuo y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y . Similarmente se dirá que X tiene hiperespacio único 2^X , $C_n(X)$ o $F_n(X)$, respectivamente. Una clase \mathbf{C} de continuos se dice que es C -determinada si cumple lo siguiente, si $X, Y \in \mathbf{C}$ y $C(X)$ es homeomorfo a $C(Y)$, entonces X es homeomorfo a Y .

Los continuos hereditariamente indescomponibles tiene hiperespacio único 2^X . Las gráficas finitas tienen hiperespacio único $C_n(X)$ para $n > 1$. Se sabe que la clase de abanicos suaves es C -determinada. A. Illanes mostró que las clases de los continuos encadenables y abanicos no son C -determinados (Ver [7], [8]).

Relacionado con el n -ésimo producto simétrico, se ha logrado probar que para cada entero positivo n , $F_n([0, 1])$ no es homeomorfo a $F_n(S)$, donde S representa una curva cerrada simple. En este trabajo se presenta el resultado que dice: si X y Y son gráficas finitas no homeomorfas, entonces para cada entero positivo n , $F_n(X)$ y $F_n(Y)$ no son homeomorfos, es decir, se probará que si X es una gráfica finita, entonces X tiene " n -ésimo producto simétrico único". Para ello tomaremos como principal apoyo el artículo [4].

En el primer capítulo, damos definiciones básicas, que son base para el desarrollo de este trabajo e incluimos algunos teoremas referentes a continuos, en particular continuos de Peano. En el Capítulo 2, se muestran algunos modelos para $C(X)$ y $F_n(X)$ de ciertos continuos, los cuales pueden ser encajados en \mathbb{R}^3 , para familiarizarnos con estos hiperespacios. Los últimos dos capítulos, son dedicados exclusivamente a las gráficas finitas, en estos capítulos se dan resultados los cuales caracterizan a una gráfica finita y a ciertos puntos representativos de las gráficas, para así probar en el último capítulo que las gráficas finitas tienen n -ésimo producto simétrico único.

Índice general

Introducción	IV
1. Preliminares	3
1.1. Sobre Continuos e Hiperespacios	5
1.2. Continuos de Peano	11
2. Modelos de Hiperespacios	13
2.1. Modelos para $C(X)$	13
2.2. Modelos para $F_n(X)$	21
3. Gráficas Finitas	31
3.1. Nociones básicas	31
3.2. Caracterización de gráficas finitas	33
4. Productos simétricos de gráficas finitas	41
4.1. Resultados en continuos de Peano	41
4.2. El caso $n \geq 4$	47
4.3. El caso $n \leq 3$	54
Bibliografía	66

Capítulo 1

Preliminares

En el presente capítulo, damos las bases para el desarrollo de esta tesis. Algunas de las pruebas son omitidas, en todo caso se proporciona una referencia donde se puede consultar su demostración.

En este trabajo el conjunto de enteros positivos es denotado por \mathbb{N} . Para hacer referencia al espacio topológico (X, τ) , solamente diremos el espacio topológico X . Dado un espacio topológico Z y un subconjunto A de Z , $\text{Bd}_Z(A)$, $\text{Cl}_Z(A)$ y $\text{Int}_Z(A)$ denota la frontera, cerradura e interior de A en Z , respectivamente. Sea f una función, $\text{Im}(f)$ denota la imagen de f .

Antes de pasar a la primer sección, haremos recordatorio de algunas definiciones básicas dentro de la topología, ya que se usan frecuentemente dentro de este trabajo.

Definición 1.0.1. Dado un espacio topológico X y $A, B \subset X$, diremos que A y B están **separados** si

$$\text{Cl}_X(A) \cap B = A \cap \text{Cl}_X(B) = \emptyset.$$

Definición 1.0.2. Diremos que un espacio topológico X es **conexo** si X no es unión de dos subconjuntos no vacíos y separados. En caso contrario diremos que X es no conexo.

Intuitivamente un espacio es conexo si es de una sola pieza.

Definición 1.0.3. Se dice que un espacio topológico X , es **conexo por caminos**, si para cada par de puntos $x, y \in X$ existe un camino conectando a x con y , es decir, existe una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$. Y diremos que es arco-conexo si γ es inyectiva.

Definición 1.0.4. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Se dice que X es **localmente conexo** en x si para cada vecindad U de x , existe una vecindad conexa V tal que $x \in V \subset U$. Diremos que X es localmente conexo si es localmente conexo en x , para todo $x \in X$.

Definición 1.0.5. Sea $f : X \rightarrow Y$ una función biyectiva entre espacios, se dice que f es un **homeomorfismo** si f y f^{-1} son continuas. En este caso, decimos que los espacios son homeomorfos.

Teorema 1.0.6. [12, Teorema 19.2, p. 106], [Invarianza del Dominio] Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^n y h un homeomorfismo de X sobre $h(X)$, otro subconjunto de \mathbb{R}^n . Entonces si x es un punto interior de X , $h(x)$ es un punto interior de $h(X)$. En particular, si A y B son subconjuntos homeomorfos de \mathbb{R}^n y A es abierto, entonces B es abierto.

Definición 1.0.7. Sea X un espacio métrico con distancia d . Sea A un subconjunto de X acotado y no vacío, el **diámetro** de A se define como el número

$$\text{diam}(A) = \sup \{d(a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

Definición 1.0.8. Un espacio métrico X es **conexo en pequeño** en un punto $x \in X$, escribiremos cik (connected im kleinen) en x , si para cada vecindad N de x existe una vecindad conexa V de x tal que $x \in \text{Int}_X(V) \subset V \subset N$. Si X es cik en todos sus puntos se dice que X es cik.

Definición 1.0.9. Sea X un espacio topológico y sea $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X . Se define el **límite inferior** y **límite superior** de $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, denotados por $\liminf A_i$ y $\limsup A_i$, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \liminf A_i &= \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \\ &\quad \emptyset \text{ para casi todo } i, \text{ excepto una cantidad finita}\}, \\ \limsup A_i &= \{x \in X : \text{para cada abierto } U \text{ tal que } x \in U, U \cap A_i \neq \\ &\quad \emptyset \text{ para una cantidad infinita de } i\}. \end{aligned}$$

Definición 1.0.10. Sean X un espacio topológico, $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y $A \subset X$. Diremos que $\lim A_i = A$ si se cumple que $\liminf A_i = A = \limsup A_i$.

1.1. Sobre Continuos e Hiperespacios

Definición 1.1.1. Un **continuo** es un espacio métrico, compacto, conexo y no vacío. Un **Subcontinuo** es un subconjunto de un continuo que a su vez es un continuo. Es decir, es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío de un continuo

Recordemos que la frontera de un subconjunto Y de X , en X , se define como $\text{Bd}_X(Y) = \text{Cl}_X(Y) \cap \text{Cl}_X(X - Y)$. El siguiente teorema, cuya demostración se puede encontrar en [1], es de gran importancia en las demostraciones que se harán más adelante.

Teorema 1.1.2. [11, Teorema 5.6, p. 74], [De los golpes de Frontera] Sea X un continuo y sea E un subconjunto propio no vacío de X . Si K es una componente de E , entonces $\text{Cl}_X(K) \cap \text{Bd}_X(E) \neq \emptyset$ (equivalentemente, dado que $\text{Cl}_X(K) \subset \text{Cl}_X(E)$, entonces $\text{Cl}_X(K) \cap \text{Cl}_X(X - E) \neq \emptyset$).

Definición 1.1.3. Sea X un espacio métrico compacto. Un subcontinuo A no degenerado de X es llamado **continuo de convergencia** de X , si existe una sucesión $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de subcontinuos A_i de X , disjuntos dos a dos, tales que

$$\lim A_i = A \text{ y } A \cap A_i = \emptyset \text{ para cada } i.$$

La demostración del siguiente teorema puede ser consultada en [11].

Teorema 1.1.4. [11, Teorema 5.12, p. 76] Sea X un continuo y sea

$$N = \{x \in X : X \text{ no es cik en } x\}$$

si $p \in N$, entonces existe un continuo de convergencia K de X tal que $p \in K$ y $K \subset N$.

Definición 1.1.5. Sea X un continuo. Un punto $p \in X$ es llamado un **punto final** de X , si dado un abierto U , existe un abierto V tal que $p \in V \subset U$ y $\text{Bd}_X(V)$ consiste precisamente de un punto.

El símbolo $X^{[1]}$ denota el conjunto de todos los puntos finales de X .

Definición 1.1.6. Sea X un espacio topológico, decimos que X es localmente separado por $K \subset X$, si para cada $p \in K$ existe una vecindad U de p tal que $U - K$ es desconexo.

Definición 1.1.7. Dado un continuo X no degenerado con métrica d , un **hiperespacio** de X es una familia de subconjuntos de X con alguna característica particular.

Consideremos las siguientes familias de subconjuntos del continuo X :

$$\begin{aligned} 2^X &= \{A \subset X : A \text{ es cerrado y no vacío}\}, \\ C(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ es conexo}\}, \\ C_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ componentes}\}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ F_n(X) &= \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ya que todos los conjuntos anteriores se definen como subconjuntos del hiperespacio 2^X , basta darle una métrica a 2^X para darle una métrica al resto de los conjuntos. A continuación damos definiciones que ayudarán a definir la métrica del hiperespacio 2^X .

Definición 1.1.8. Sean $\varepsilon > 0$ y $p \in X$. Se define la **bola** de radio ε centrada en p como el conjunto

$$B(\varepsilon, p) = \{q \in X : d(p, q) < \varepsilon\}.$$

Definición 1.1.9. Sean $\varepsilon > 0$ y $A \in 2^X$. Se le llama **nube** de radio ε centrada en A al conjunto

$$N(\varepsilon, A) = \{q \in X : \text{existe } x \in A \text{ tal que } d(x, q) < \varepsilon\}.$$

Dadas estas definiciones, podemos definir una métrica para 2^X como sigue. Sean $\varepsilon > 0$ y $A, B \in 2^X$, definimos a $H(A, B)$ como

$$H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

La siguiente proposición muestra que $H(A, B)$ es una métrica.

Proposición 1.1.10. *Dados tres elementos $A, B, C \in 2^X$, se cumple que:*

- (a) $H(A, B)$ está bien definida;
- (b) $H(A, B) \geq 0$;

- (c) $H(A, B) = H(B, A)$;
- (d) $H(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$;
- (e) $H(A, C) \leq H(A, B) + H(B, C)$.

Demostración: Para cada par de elementos $A, B \in 2^X$, definimos el conjunto

$$E(A, B) = \{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\}.$$

Notemos que de acuerdo a la definición de H , tenemos que

$$H(A, B) = \inf E(A, B)$$

(a) Probaremos que $E(A, B)$ es no vacío y está acotado inferiormente. Primero mostraremos que es no vacío, en efecto, considerando p y q elementos cualesquiera de X se tiene que $d(p, q) < \text{diam}(X) + 1$. Así, $A \subset N(\text{diam}(X) + 1, B)$ y $B \subset N(\text{diam}(X) + 1, A)$. De aquí que $\text{diam}(X) + 1$ pertenece a $E(A, B)$. Por lo tanto, $E(A, B)$ es no vacío. Además, notemos que este conjunto está acotado inferiormente por el 0. Por lo que se concluye que $H(A, B)$ está bien definida.

(b) Por la definición de $E(A, B)$, tenemos que $H(A, B) \geq 0$.

(c) Por la definición de H , tenemos que

$$\begin{aligned} H(A, B) &= \inf\{\varepsilon > 0 : A \subset N(\varepsilon, B) \text{ y } B \subset N(\varepsilon, A)\} \\ &= \inf\{\varepsilon > 0 : B \subset N(\varepsilon, A) \text{ y } A \subset N(\varepsilon, B)\} \\ &= H(B, A). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $H(A, B) = H(B, A)$.

(d) Primero supongamos que $A = B$, probaremos que $H(A, B) = 0$. Notemos que para cualquier $\varepsilon > 0$, $A \subset N(\varepsilon, A)$, por lo que $E(A, A) = (0, \infty)$. Dado que $H(A, A) = \inf E(A, A) = \inf(0, \infty)$, entonces $H(A, A) = 0$.

Ahora supongamos que $H(A, B) = 0$, queremos mostrar que $A = B$. Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$, entonces por la hipótesis tenemos que $\inf E(A, B) = 0 < \varepsilon$. Así que, existe $\delta \in E(A, B)$ tal que $\delta < \varepsilon$ por lo que $A \subset N(\delta, B)$. Por lo tanto, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta < \varepsilon$, entonces $B(\varepsilon, a) \cap B \neq \emptyset$, y como esto ocurre para cualquier ε , tenemos que a pertenece a la cerradura de B en X , pero B es cerrado, así que $a \in B$. De aquí que, $A \subset B$. De manera análoga se prueba que $B \subset A$. Por lo tanto, $A = B$.

(e) Probaremos que

$$\inf E(A, C) \leq \inf E(A, B) + \inf E(B, C).$$

Dado que el ínfimo de la suma de dos conjuntos es la suma de los ínfimos de los conjuntos, por lo anterior, tenemos que probar que

$$\inf E(A, C) \leq \inf\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}.$$

Sean $\delta \in E(A, B)$ y $\eta \in E(B, C)$. Por definición, $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\eta, C)$. Dada $a \in A$, existe $b \in B$ tal que $d(a, b) < \delta$, además existe $c \in C$ tal que $d(b, c) < \eta$. Por la desigualdad del triángulo tenemos que $d(a, c) < \delta + \eta$. Por lo tanto $A \subset N(\delta + \eta, C)$. De la misma manera, se tiene que $C \subset N(\delta + \eta, A)$. De aquí, $\delta + \eta \in E(A, C)$. Entonces $\inf E(A, C) \leq \delta + \eta$. Por lo que $\inf E(A, C)$ es una cota inferior del conjunto $\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}$. Por lo tanto,

$$\inf E(A, C) \leq \inf\{\delta + \eta : \delta \in E(A, B) \text{ y } \eta \in E(B, C)\}.$$

Así podemos concluir que

$$\inf E(A, C) \leq \inf E(A, B) + \inf E(B, C).$$

■

La Proposición 1.1.9 nos permite dar la siguiente definición.

Definición 1.1.11. La función H definida anteriormente es llamada **métrica de Hausdorff**.

Intuitivamente, dos elementos de 2^X están cerca con respecto a la métrica de Hausdorff si se parecen mucho y uno está encima del otro. Por otra parte,

aunque dos elementos de 2^X se intersecten, pueden estar lejos en la métrica que estamos considerando. Esto se ilustra en la Figura 1.1.

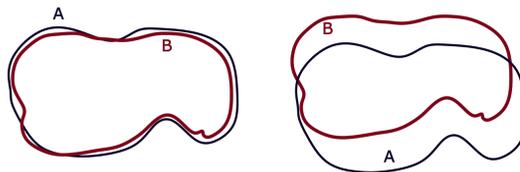


Figura 1.1: Idea intuitiva de la métrica de Hausdorff y conjuntos lejanos respecto a esta métrica.

Sean X un continuo y U_1, \dots, U_m subconjuntos abiertos de X . Definimos

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n = \{A \in F_n(Z) : A \subset U_1 \cup \dots \cup U_m \text{ y } A \cap U_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, m\}\}.$$

Proposición 1.1.12. [13, Teorema 0.10, p. 9] *La familia que consta de todos los conjuntos de la forma $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$, forman una base para una topología sobre 2^X .*

Definición 1.1.13. *La topología de la proposición anterior es llamada **Topología de Vietoris**. La topología de Vietoris coincide con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, ver ([11], Theorem 0.13, p.10).*

A continuación se hará mención de algunas propiedades que satisfacen los hiperespacios de continuos.

Teorema 1.1.14. [9, Teorema 4.2, p. 66] *El hiperespacio 2^X es compacto.*

Corolario 1.1.15. [9, Teorema 4.3, p. 69] *El hiperespacio $C(X)$ es compacto.*

Corolario 1.1.16. [9, Teorema 6.11, p. 92] *El hiperespacio $C(X)$ es arcoconexo.*

Corolario 1.1.17. [9, Teorema 6.12, p. 93] *El hiperespacio 2^X es arcoconexo.*

Corolario 1.1.18. [9, Teorema 6.13, p. 93] Los hiperespacios $C(X)$ y 2^X son continuos.

Para mostrar que $F_n(X)$ es un continuo para cada continuo X , usaremos el siguiente resultado:

Lema 1.1.19. Sean X un continuo y $g_n : X^n \rightarrow F_n(X)$ la función definida como

$$g_n(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Entonces g_n es continua y es suprayectiva.

Demostración: Sea X^n con la métrica D dada por

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\}.$$

Sean $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in X^n$ y $\epsilon > 0$, tales que

$$D((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = \max\{d(x_1, y_1), \dots, d(x_n, y_n)\} < \epsilon.$$

Por lo que $d(x_i, y_i) < \epsilon$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. De aquí que

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset N(\epsilon, \{y_1, \dots, y_n\})$$

y

$$\{y_1, \dots, y_n\} \subset N(\epsilon, \{x_1, \dots, x_n\}).$$

De donde se tiene que $H(g_n(x_1, \dots, x_n), g_n(y_1, \dots, y_n)) < \epsilon$. Por lo tanto g_n es continua.

Para probar que g_n es suprayectiva observemos que cada elemento de $F_n(X)$ se puede escribir de la forma $\{x_1, \dots, x_n\}$, para el caso en el que el conjunto tiene menos de n elementos, bastaría con repetir algunos de estos y no cambiaría en el conjunto. ■

Corolario 1.1.20. Sea X un continuo y $n \in \mathbb{N}$, entonces $F_n(X)$ es un continuo.

Demostración: Por el lema anterior la función g es continua. Dado que la imagen continua de un compacto y conexo es compacto y conexo, respectivamente. Además $F_n(X)$ es un subconjunto de 2^X , se tiene que $F_n(X)$ es un continuo.

Teorema 1.1.21. [2, Teorema 6, p. 880] Para $n = 1, 2, 3$, $F_n([0, 1])$ es homeomorfo a $[0, 1]^n$.

Notemos que para $n = 1$, $F_1([0, 1])$ es isométrico a $[0, 1]^1$, (en general para cualquier continuo). El caso $n = 2$, lo mostraremos en la Sección 2.2 y el caso $n = 3$ se puede consultar en [2].

Teorema 1.1.22. [5, Lema 2.2, p. 252] Sea $\mathcal{M} \subset F_n(X)$ compacto y localmente conexo. Entonces $\bigcup \mathcal{M} \subset X$ es compacto y localmente conexo.

1.2. Continuos de Peano

En esta sección se dan algunas definiciones y enunciamos algunos resultados sobre continuos de Peano. Dado que para la demostración de los Teoremas presentados a continuación se requiere de más resultados, se omitirán las demostraciones.

Definición 1.2.1. Un espacio métrico es llamado un **espacio de Peano** si para cada $p \in X$ y cada vecindad N de p , existe un subconjunto abierto conexo U de X tal que $p \in U \subset N$. Dicho de otra forma, un espacio métrico es un espacio de Peano si y sólo si:

1. X es localmente conexo;
2. cada componente de cada subconjunto abierto de X es abierto en X ;
3. X es conexo en pequeño.

Un continuo de Peano es un espacio de Peano el cual es un continuo.

Teorema 1.2.2. [11, Teorema 8.23, p. 130] Todo continuo de Peano no degenerado es arco-conexo.

Definición 1.2.3. Sea S un espacio topológico. Si $p \in S$, entonces S es llamado **localmente arco-conexo** en p , lo denotamos por LAC en p , si toda vecindad de p contiene una vecindad arco-conexa de p . El espacio S es llamado localmente arco-conexo, si S es LAC en todo punto.

Teorema 1.2.4. [11, Teorema 8.25, p. 131] Todo subconjunto abierto de un continuo de Peano es LAC. En particular, todo continuo de Peano es LAC.

Teorema 1.2.5. [11, Teorema 8.26, p. 132] *Todo subconjunto abierto conexo de un continuo de Peano es arco-conexo.*

Definición 1.2.6. Un **arco** es un espacio homeomorfo al intervalo cerrado $[0, 1]$.

Definición 1.2.7. Una curva cerrada simple es un espacio homeomorfo a la circunferencia unitaria S^1 .

Definición 1.2.8. Dado un entero $n \geq 3$, un **n -odo simple** es un espacio que es homeomorfo al cono sobre un espacio discreto de n -puntos. Si Z es un n -odo simple, entonces el único punto de Z que es de orden mayor o igual que tres, en Z , es llamado vértice de Z . Un 3-odo simple es llamado triodo simple.

Nota: Un n -odo lo veremos como la unión de n arcos, J_1, \dots, J_n , tales que son ajenos dos a dos, excepto en un punto p .

Teorema 1.2.9. [11, Teorema 8.40, p. 135] *Sea X un continuo de Peano no degenerado. Si X no contiene 3-odos simples, entonces X es un arco o una curva cerrada simple.*

Capítulo 2

Modelos de Hiperespacios

Como ya se ha dicho un hiperespacio es un conjunto de subconjuntos de un continuo X , por lo que es de mucha ayuda tener un modelo geométrico que represente a este espacio. En este capítulo se van a construir algunos modelos de hiperespacios de algunos continuos, un modelo para un hiperespacio $K(X)$ es un espacio conocido el cual es topológicamente equivalente al hiperespacio, donde los elementos son puntos en lugar de subconjuntos.

2.1. Modelos para $C(X)$

Comenzaremos con un ejemplo simple.

Ejemplo 1: Consideremos el intervalo $[0, 1]$. Los subcontinuos de $[0, 1]$ son los intervalos cerrados y los conjuntos unipuntuales. Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} C([0,1]) &= \{A \subset [0,1]: A \text{ es un subconjunto cerrado, conexo y no vacío}\} \\ &= \{[a,b] \subset [0,1]: 0 \leq a \leq b \leq 1\}. \end{aligned}$$

Sea $T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Notemos que T es un triángulo en \mathbb{R}^2 acotado por el eje Y, la diagonal y la recta que está formada por los puntos cuya segunda coordenada es 1. Definamos a $\varphi : C([0,1]) \rightarrow T$ dada por $\varphi([a, b]) = (a, b)$.

Afirmación: φ es un homeomorfismo.

En efecto, sean $[a, b], [c, d] \in C([0, 1])$ tales que $\varphi([a, b]) = \varphi([c, d])$. Entonces, $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$. Así, $[a, b] = [c, d]$. Por lo tanto φ es

inyectiva.

Ahora, podemos observar que para cada $(a, b) \in T$, $[a, b] \in C([0, 1])$ es tal que $\varphi([a, b]) = (a, b)$, lo que prueba que φ es sobreyectiva.

Para probar que φ es continua, consideremos $\{[a_i, b_i]\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión en $C([0, 1])$ que converge a $[a, b]$.

Sea $\epsilon > 0$, por la convergencia de la sucesión $\{[a_i, b_i]\}_{i=0}^{\infty}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $i > N$, $H([a_i, b_i], [a, b]) < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Notemos que

$$\begin{aligned} N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a, b]\right) &= \left(a - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \text{ y} \\ N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a_i, b_i]\right) &= \left(a_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Así, por la definición de la métrica H , $[a_i, b_i] \subset N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a, b]\right)$ y $[a, b] \subset N\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, [a_i, b_i]\right)$, es decir, $[a_i, b_i] \subset \left[a - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right]$ y $[a, b] \subset \left[a_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, b_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right]$.

De donde $a - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} < a_i < b_i < b + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y $a_i - \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} < a < b \leq b_i + \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$, entonces $a_i - a < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ y $b_i - b < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. Así, $(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2 < \epsilon^2$, por lo que

$\sqrt{(a_i - a)^2 + (b_i - b)^2} < \epsilon$. Por lo tanto, para toda $i > N$, $d((a_i, b_i), (a, b)) < \epsilon$, es decir, $\{(a_i, b_i)\}_{i=0}^{\infty}$ converge a (a, b) , lo que prueba que φ es una función continua. Por otro lado, por el Corolario 1.1.17., $C([0, 1])$ es un continuo, en particular $C([0, 1])$ es compacto. Como T es subespacio de \mathbb{R}^2 , entonces T es de Hausdorff, en consecuencia φ es un homeomorfismo.

Por lo anterior podemos afirmar que un modelo para $C([0, 1])$ es el triángulo T , el cual se muestra en la Figura 2.1.

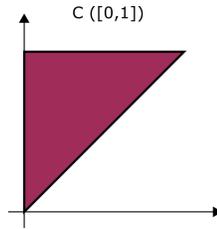


Figura 2.1: Modelo de $C([0,1])$.

Ahora veamos como quedan representados algunos elementos particulares.

a) Notemos que $\varphi([0, 1]) = (0, 1)$, por lo que el intervalo $[0, 1]$ queda repre-

sentado por el vértice $(0, 1)$ de T .

b) Recordemos que los conjuntos de la forma $\{p\}$, donde $p \in [0, 1]$, se pueden representar como $\{p\} = [p, p]$. Estos elementos de $F_1([0, 1])$, también pertenecen a $C([0, 1])$, así que todo $p \in [0, 1]$ está representado en T por (p, p) . De tal manera que si consideramos a cada punto en el intervalo, se obtiene uno de los tres lados del triángulo T , exactamente los puntos que están en la diagonal de T .

c) Los subconjuntos de la forma $[0, b]$, donde b varía en $[0, 1]$ quedan representados en T por los puntos de la forma $(0, b)$. De modo que si consideramos a todos los subconjuntos de $[0, 1]$ que contienen al 0, estos estarán representados en T como otro lado de T , lo que tiene T en común con el eje Y, como se muestra en la Figura 2.2.

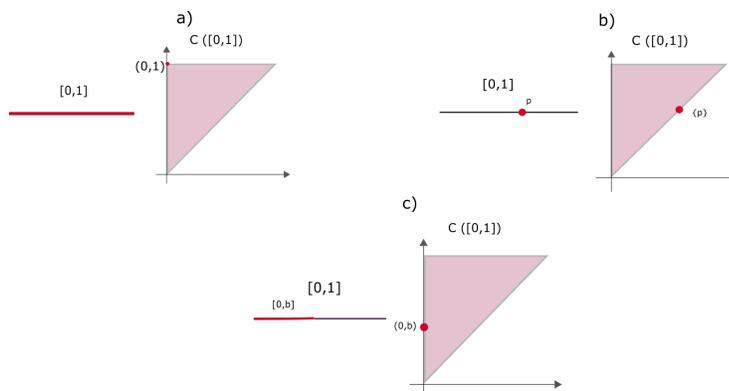


Figura 2.2: Representación de los subconjuntos de $[0, 1]$ descritos en los incisos a), b) y c), respectivamente.

Ejemplo 2: Ya que se ha logrado dar un modelo para el intervalo $[0, 1]$, podemos construir un modelo para $C(S)$, donde S es la circunferencia unitaria en el plano \mathbb{R}^2 la centrada en el origen. S es otro continuo “simple”, y sus subcontinuos son “pocos”. Sólo tiene como subcontinuos a los conjuntos que constan de un sólo punto, los subarcos y a S mismo. Cada subarco A está perfectamente determinado por su punto medio $m(A)$ y su longitud $l(A)$. Usaremos la asignación $f(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$, para cuando A es un arco o un conjunto de un solo punto y a S se le asigna el origen de \mathbb{R}^2 .

Con esto hemos obtenido que el disco unitario D (centrado en el origen) del plano \mathbb{R}^2 es un modelo para $C(S)$, esto se muestra en la Figura 2.3.

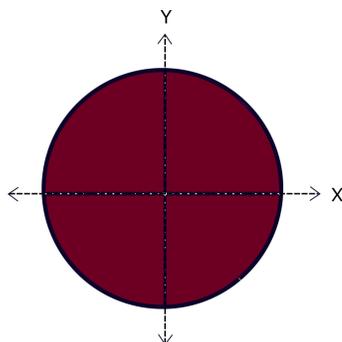


Figura 2.3: Modelo para $C(S)$.

Al igual que antes, podemos identificar algunos subcontinuos particulares.

a) Comencemos con los conjuntos de un solo punto, estos van a dar a la orilla de D .

b) Los subarcos que tienen una longitud predeterminada y fija conforman una circunferencia con centro en el origen, como se muestra en la Figura 2.4.

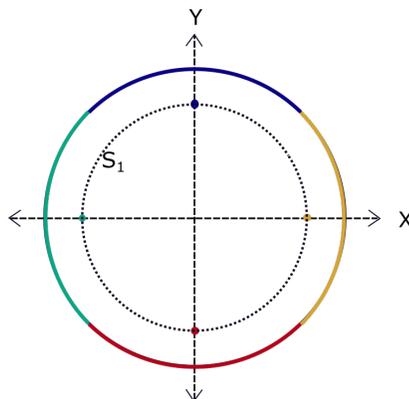


Figura 2.4: S_1 representa los subarcos de longitud π en D .

c) Ya que S tiene centro en el origen, un punto interesante es $p = (1, 0)$. Ahora veamos que le corresponde al conjunto $\mathcal{A} = \{A \in C(S) : p \in A\}$. Definiremos \mathfrak{C}_1 como el conjunto que consta de los subarcos de S que tiene a p como extremo izquierdo, para esto diremos que el extremo izquierdo es el extremo del subarco que queda a la izquierda cuando nos paramos sobre el arco y vemos en la dirección hacia el origen, en la Figura 2.5 se muestra esta situación.

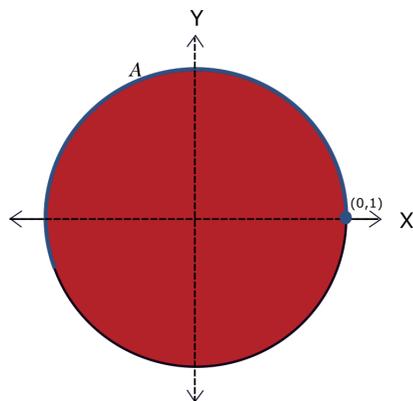


Figura 2.5: Representación del arco A , con extremo izquierdo $p = (1,0)$ en D .

Notemos que para cada $A \in \mathfrak{C}_1$ el punto medio de A esta en la semicircunferencia superior de S . Los conjuntos de \mathfrak{C}_1 van desde los más pequeños, que son casi iguales al conjunto $\{p\}$, para estos su punto medio está también muy cercano a p y dado que su longitud es casi cero, ellos quedan representados en D muy cerca de p ; hasta los muy grandes que son casi iguales a S , cuyo punto medio está muy cercano al punto $(-1,0)$ de S , y como su longitud es casi igual a 2π , estarán representados por puntos muy cercanos al origen. Entonces, en la Figura 2.6 se muestra, abusando de la notación, la representación de \mathfrak{C}_1 . En esta figura también se incluye la representación del conjunto \mathfrak{C}_2 que consta de los subarcos que tienen a p como extremo derecho.

Como para cada subarco A que contiene a p existen dos subarcos del mismo tamaño que A , uno que contiene a p como extremo izquierdo y uno que lo contiene como extremo derecho, por el inciso c) sabemos que estos tres subarcos quedan representados como tres puntos en una misma circunferencia, vemos que los subarcos que contienen como extremo al punto p quedan representados en \mathfrak{C}_1 y en \mathfrak{C}_2 , entonces, cada subarco A que contiene a p queda representado como un punto entre \mathfrak{C}_1 y en \mathfrak{C}_2 , por lo que podemos concluir que el conjunto \mathcal{A} queda representado como en la región limitada por \mathfrak{C}_1 y \mathfrak{C}_2 .

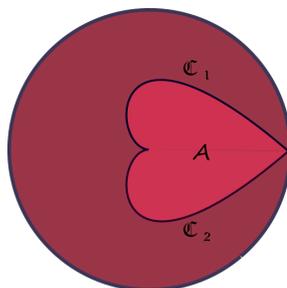


Figura 2.6: Representación del conjunto \mathcal{A} en D .

Ejemplo 3: Ahora consideremos un *triodo simple*, T . Una forma de visualizar a este continuo es pensar en la colección de los puntos en \mathbb{R}^3 contenidos en los ejes coordenados cuya distancia al origen es menor o igual que uno. A los segmentos que van del origen a $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ los denotaremos por L_1, L_2 y L_3 , respectivamente, y al origen lo denotaremos por v , véase Figura 2.7.

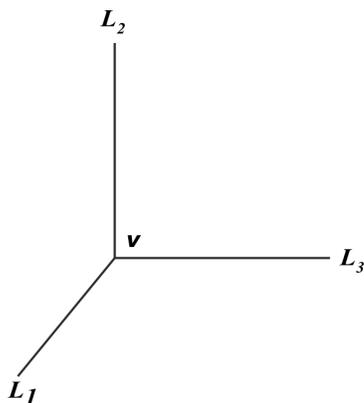


Figura 2.7: Triodo simple, T .

En T existen dos tipos de subcontinuos, aquéllos que tienen al punto v y aquéllos que no lo contienen. Consideremos un subcontinuo A que contenga a v , como se muestra en la Figura 2.8. Para $i = \{1, 2, 3\}$, hacemos $J_i = A \cap L_i$. Entonces cada J_i es un subcontinuo de L_i que contiene a v , este subcontinuo bien podría constar sólo de v . Sea a_i la longitud de J_i . Por lo que A está determinado de manera única por las longitudes de las intersecciones, de manera que podemos asignarle a A el punto en \mathbb{R}^3 dado por (a_1, a_2, a_3) , con

$0 \leq a_i \leq 1$ para cada $i = \{1, 2, 3\}$, entonces la imagen de esta asociación es el cubo sólido $C = [0, 1]^3$. Hasta aquí tenemos la representación de los subcontinuos de T que contienen a v es el cubo C .

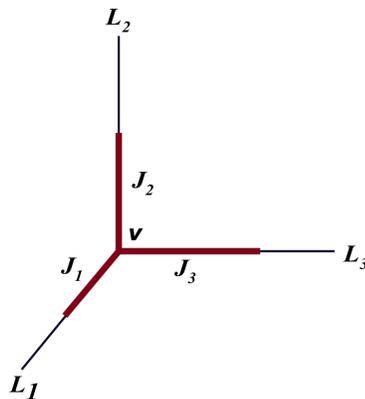
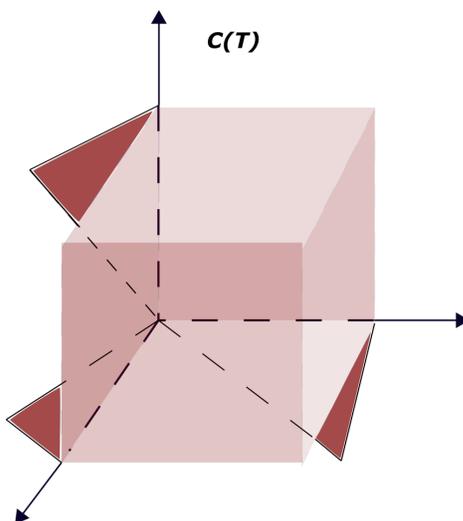


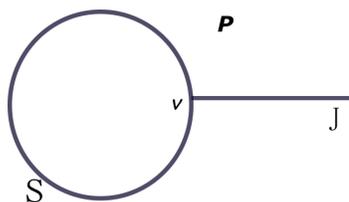
Figura 2.8: Subcontinuo A de T que contiene a v .

Nos falta añadir a este modelo una representación para los subcontinuos de T que no contienen a v . Notemos que cualquiera de tales subcontinuos debe estar contenido en uno de los conjuntos L_i . El modelo de los subcontinuos L_i ya son conocidos por nosotros, ya que L_i es homeomorfo a $[0, 1]$. Recordemos que el hiperespacio puede ser representado por un triángulo i . En cada uno de estos triángulos estaríamos repitiendo a algunos elementos de C pues los subcontinuos que contienen a v ya están representados. Afortunadamente podemos identificarlos fácilmente.

En C , estos subcontinuos están representados por una terceta que tiene una cierta coordenada en el lugar i y que tienen las otras dos coordenadas iguales a 0. De manera que tal elemento se encuentra en una de las aristas del cubo C . Como vimos en el Ejemplo 1, tales subcontinuos de L_i están representados en el triángulo i como una de sus orillas. De manera que la representación final de $C(T)$ consiste en un cubo sólido con tres triángulos pegados por sus orillas, como se ilustra en la Figura 2.9.

Figura 2.9: Modelo para $C(T)$.

Definición 2.1.1. La paleta P es el continuo formado por la unión de una curva cerrada simple S y un arco J , los cuales se intersectan en un punto v , que es un punto final de J .

Figura 2.10: Continuo $S \cup J = P$.

Ejemplo 4: En este ejemplo, el continuo que vamos a considerar es "la paleta", definido anteriormente. Observemos que en P hay tres tipos de subcontinuos: los que están contenidos en S , los que están contenidos en J y los que tienen al punto v . Por los ejemplos anteriores, sabemos como representar las dos primeras clases de subcontinuos, los que están contenidos en S son un disco y los de la segunda clase un triángulo. A continuación analizaremos a los subcontinuos A que tengan a v . Notemos que este conjunto está formado por dos partes, la que interseca a S y la que interseca a J . Así, a cada subcontinuo A de P que contenga a v , lo podemos representar como una pareja

$(A \cap S, A \cap J)$. Notemos que la primera coordenada se representa como un punto del corazón contenido en el disco, (recordemos que los elementos del corazón representan a la colección de subcontinuos de S que contienen a v). Y la segunda coordenada se representa como un punto de un arco.

Notemos que los dos conjuntos son independientes, es decir, podemos modificar alguno de los dos conjuntos $A \cap S$ o $A \cap J$ sin alterar el otro y seguir teniendo un subcontinuo de P que contenga a v . Por lo que la familia de todos los subcontinuos A pueden ser representados como el producto de un corazón y un arco, es decir, es un cilindro cuya base tiene forma de corazón. Finalmente tendremos que unir los tres modelos de los tres tipos de subcontinuos de P ya descritos. Veamos como tienen que ser pegados, un subcontinuo que pertenezca al disco y al cilindro sobre el corazón tiene que ser un subcontinuo de S que contenga a v y su intersección con J sea sólo el punto v . De manera que este subcontinuo tiene que estar representado en el corazón contenido en el disco y también la base del cilindro. Así, para añadir el disco al cilindro, sólo hay que pegarlo en su base.

Ahora sólo falta pegar el triángulo que representa a los subcontinuos contenidos en J , de manera similar, vemos que un subcontinuo que pertenezca al cilindro y al triángulo tienen que ser subcontinuos de J que contengan a v . De aquí que el triángulo debe pegarse al cilindro en el arco que esta en la punta del corazón. Por tanto un modelo para $C(P)$ es como el que se muestra en la Figura 2.11.

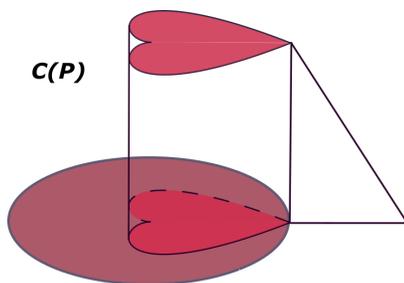


Figura 2.11: Modelo para $C(P)$.

2.2. Modelos para $F_n(X)$

En esta sección construiremos algunos modelos para $F_n(X)$. Recordemos que $F_n(X) = \{A \in 2^X : A \text{ tiene a lo más } n \text{ puntos}\}$ donde $n \in \mathbb{N}$. Considera-

remos, como anteriormente, continuos “sencillos” como el intervalo, triodo simple y la circunferencia.

Ejemplo 5: Modelo para $F_2([0, 1])$. Sea $\{a, b\} \in F_2([0, 1])$. Definamos

$$T = \{(a, b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}.$$

Podemos considerar el homeomorfismo $\phi : F_2([0, 1]) \rightarrow T$ definido como $\phi(\{a, b\}) = (\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$ (la prueba de que ϕ es homeomorfo es de manera similar como en la Afirmación del Ejemplo 1). De aquí que cada conjunto $\{a, b\}$ está determinado de manera única por la pareja $(\min\{a, b\}, \max\{a, b\})$, y viceversa. Ahora, notemos que $0 \leq \min\{a, b\} \leq \max\{a, b\} \leq 1$ y que cualquier pareja de la forma (u, v) con $0 \leq u \leq v \leq 1$ es igual a $\phi(\{u, v\})$ por lo que la imagen de ϕ es exactamente el triángulo $T = \{(a, b) : 0 \leq a \leq b \leq 1\}$. Como en el caso $C([0, 1])$, obtenemos el triángulo de la Figura 2.12 como el modelo para el hiperespacio de $[0, 1]$.

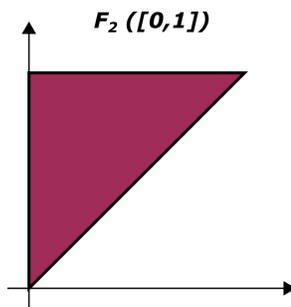


Figura 2.12: Modelo para $F_2([0, 1])$.

En vista de nuestro logro con el modelo para $F_2([0, 1])$, ahora intentaremos construir un modelo para $F_2(T)$, donde T es un triodo simple.

Ejemplo 6: Modelo para $F_2(T)$.

Recordemos que T es un continuo formado por tres arcos, L_1, L_2, L_3 tales que $L_i \cap L_j = \{v\}$, si $i \neq j$. Consideremos los arcos $J_1 = L_2 \cup L_3$, $J_2 = L_1 \cup L_3$ y $J_3 = L_1 \cup L_2$. Observemos que $F_2(J_i)$ es un triángulo para cada $i \in \{1, 2, 3\}$. Notemos que si $a, b \in T$, a pertenece a algún L_l y b se queda contenido en algún L_m , no olvidando el caso en el que $l = m$. De tal manera que $\{a, b\}$ pertenece a algún J_i . Por lo cual $F_2(T) = F_2(J_1) \cup F_2(J_2) \cup F_2(J_3)$. Por tanto, si pegamos correctamente los conjuntos $F_2(J_i)$, obtendremos un

modelo para $F_2(T)$. Dicho lo anterior, procederemos a analizar la unión correcta de dichos conjuntos. Notemos que $\{a, b\} \in F_2(J_1) \cap F_2(J_2)$ si y sólo si $\{a, b\} \subset J_1$ y $\{a, b\} \subset J_2$, es decir, si $\{a, b\} \subset J_1 \cap J_2 = L_3$. Esto muestra que $F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(L_3)$. Entonces $F_2(L_3)$ es un subtriángulo de $F_2(J_1)$ y $F_2(J_2)$, como se ve en la Figura 2.13.

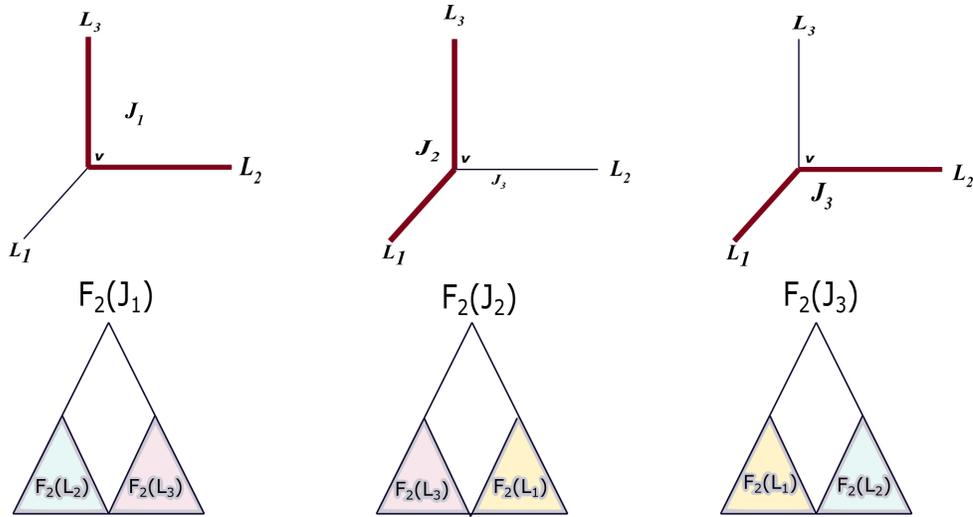


Figura 2.13: Modelo para $F_2(J_i)$ para cada $i \in \{1, 2, 3\}$.

De tal manera que tenemos que pegar $F_2(J_1)$ y $F_2(J_2)$ por este subtriángulo. El mismo procedimiento se realiza para pegar $F_2(J_2)$ con $F_2(J_3)$ y $F_2(J_1)$ y $F_2(J_3)$. Obteniendo como resultado el modelo de $F_2(T)$ mostrado en la Figura 2.14.

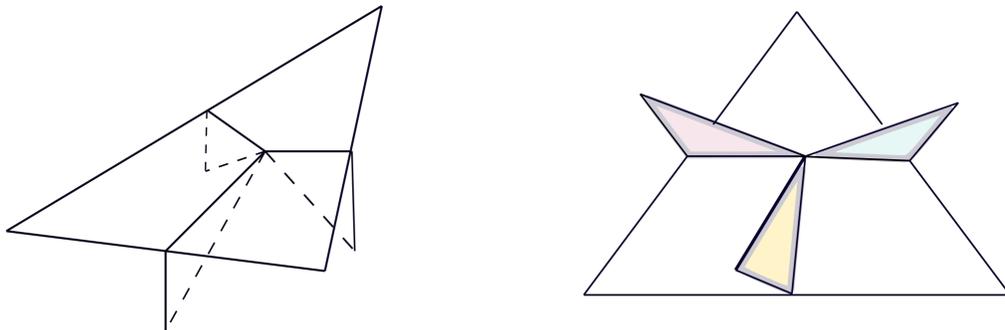


Figura 2.14: Modelo para $F_2(T)$.

Ahora veamos cómo obtener un modelo para $F_2(S)$, donde S representa la circunferencia unitaria en el plano centrada en el origen.

Ejemplo 7: Modelo para $F_2(S)$.

De la misma forma como en el ejemplo para $C(S)$, dado un subconjunto $A = \{a, b\}$ de S (recordemos que a y b pueden ser iguales) elegimos el arco menor que une a a y a b , denotemos al punto medio por $m(A)$ y a la longitud de dicho arco por $l(A)$. Consideremos la asignación $f(A) = (1 - \frac{l(A)}{2\pi})m(A)$, esta asignación está bien definida en todos los puntos excepto en el conjunto de la forma $A = \{a, -a\}$, es decir, en los puntos antípodas de S , pues al conjunto A se le estarían asignando dos puntos, uno por cada arco que determina dicha pareja. Por lo cual, por ahora, omitimos estos puntos, así que la imagen de f es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1\}$. Como se muestra en la Figura 2.15.

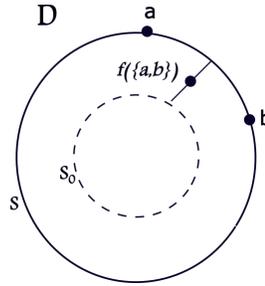


Figura 2.15: Imagen de la asignación $f(A)$.

Por lo anterior tendríamos una extensión h de la función f cuya imagen es el anillo $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$, hasta este momento todo estaría bien, salvo que a cada pareja de puntos antípodas de $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = \frac{1}{2}\}$ le estamos asignando dos puntos. Esto se soluciona si identificamos los puntos antípodas de S_0 . Así, obtenemos el modelo final para $F_2(S)$, lo que obtenemos es una banda de Möbius.

En la Figura 2.16 se muestra cómo se obtiene la banda. Ponemos flechas en la circunferencia interior, S_0 , las cuales serán etiquetadas con la letra c . Notemos que para pegar puntos antípodas en S_0 es equivalente a pegar una flecha c con la otra, siguiendo la misma dirección, ahora el anillo se corta por las dos flechas d y e , esto se muestra en el inciso a) de la Figura 2.16. En el inciso b) de la Figura 2.16, se muestran las piezas 1 y 2, ya cortadas. Para

poder pegar las flechas c correctamente, es necesario girar la pieza 2, como se muestra en el inciso c) de la Figura 2.16. Finalmente torcemos el cuadro, para poder pegar las orillas en el sentido indicado por las flechas. Lo que nos da como resultado la Banda de Möbius del inciso d) de la Figura 2.16.

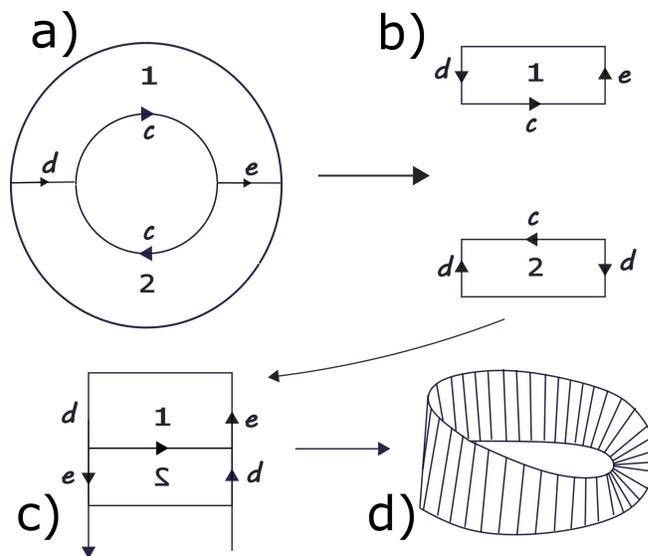


Figura 2.16: Método para obtener la banda de Möbius.

A continuación se muestra cómo se representa en la banda el conjunto $D(p) = \{p, x\} : x \in S\}$. La imagen de este conjunto bajo la función f , consiste de dos arcos B_1 y B_2 del anillo $D \cup S_0$. Tomando en cuenta las transformaciones que hemos hecho para obtener la banda de Möbius, se puede ver que $D(p)$ es homeomorfo a la curva cerrada simple B que toca la orilla de la banda en un punto exactamente. Como se muestra en la Figura 2.17.

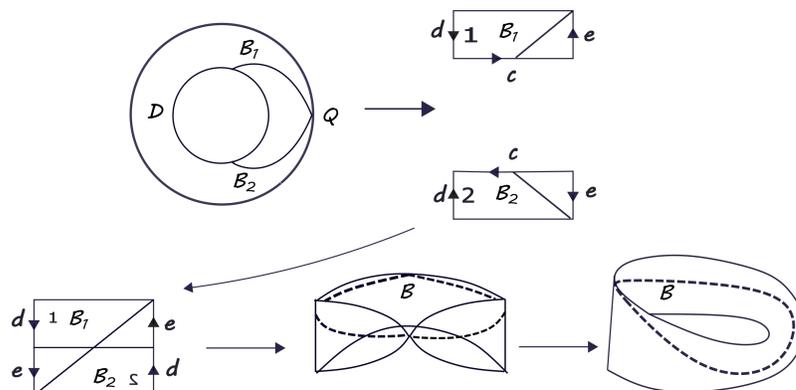


Figura 2.17: Representación de $D(p)$ en la banda de Möbius.

Sea X el continuo figura 8, el continuo que se forma al unir dos circunferencias S_1 y S_2 únicamente en un punto v , como se muestra en la Figura 2.18.

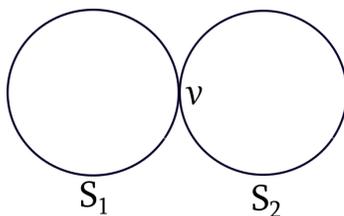


Figura 2.18: Continuo figura 8.

Procederemos a encontrar el modelo para $F_2(X)$.

Ejemplo 8: Modelo para $F_2(X)$. Sean $\{a, b\} \in F_2(X)$. Entonces tenemos los siguientes casos:

- (a) $a, b \in S_1$;
- (b) $a, b \in S_2$;
- (c) $a \in S_1$ y $b \in S_2$.

Cabe aclarar que el caso $b \in S_1$ y $a \in S_2$, esta incluida en el inciso (c), ya que los elementos se eligen sin ningún orden. Por el ejemplo anterior, los elementos descritos en los inciso (a) y (b), quedan representados en una banda de Möbius, las cuales denotaremos por \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 , respectivamente. Para el inciso (c). Dado $a \in S_1$, podemos considerar cualquier punto b de la circunferencia S_2 . De tal manera que para cada punto de S_1 , debemos poner toda una circunferencia. En la Figura 2.19, se han colocado la circunferencia representando a S_1 y para cada uno de sus elementos se ha puesto una

circunferencia transversal que representa a S_2 . Terminado el procedimiento para cada uno de los puntos, lo que se obtiene es un toro o la superficie de una dona.

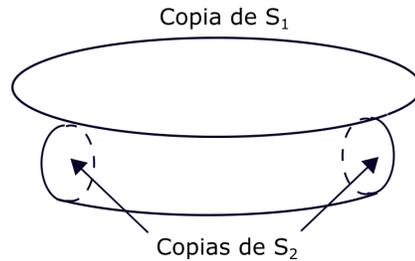


Figura 2.19: Representación de los conjuntos $\{a, b\}$ con $a \in S_1$ y $b \in S_2$.

Ya considerados los tres casos por separado, debemos ver cómo pegar \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 y el toro. Si $A = \{a, b\}$ pertenece a \mathcal{M}_1 y al toro, se tiene que tanto a como b pertenecen a S_1 , pues $A \in \mathcal{M}_1$, por otro lado por estar A en el toro, $a \in S_1$ y $b \in S_2$. Por lo que la única opción para b es que sea v . Así que un elemento característico de dicha intersección es de la forma $A = \{a, v\}$, donde a varía en S_1 . En el ejemplo anterior vimos que estos elementos están representados en \mathcal{M}_1 como una circunferencia.

Por la construcción del toro, podemos pensar que S_2 es un aro que gira alrededor de la circunferencia S_1 , por lo que al dejar fijo a v y variar el punto a en S_1 , podemos pensar que v es un punto fijo del aro que va girando alrededor de S_1 , por tanto, los conjuntos de la forma $A = \{a, v\}$ representarán una circunferencia en el toro paralela a la circunferencia horizontal. Por lo que \mathcal{M}_1 será pegada al toro uniendo la circunferencia horizontal del toro y la circunferencia en \mathcal{M}_1 , como es señalado en la Figura 2.20. De manera similar, podemos ver que los conjuntos en la intersección se representan por una circunferencia en \mathcal{M}_2 y en el toro se representan como una circunferencia vertical. Es por esto que el modelo de $F_2(X)$ se obtiene al hacer el pegado de las dos bandas al toro (ver Figura 2.20).

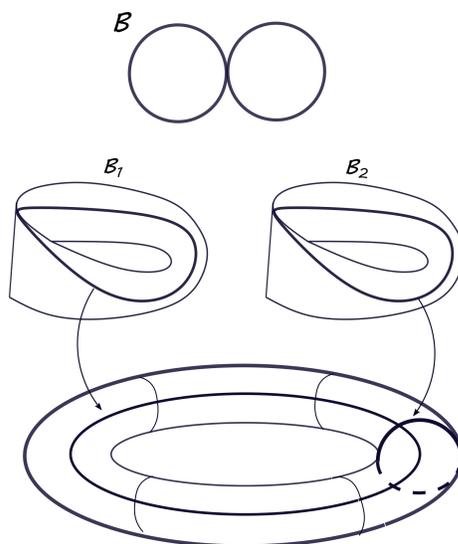


Figura 2.20: Modelo del segundo producto simétrico del continuo figura 8.

Ejemplo 8: Modelo para $F_2(P)$

Recordemos que P es la unión de una curva cerrada simple S y el arco J que se intersectan sólo en el punto v . Como en el ejemplo anterior, vemos que hay tres tipos de subcontinuos, los que se quedan contenidos en S , los que se quedan contenidos en J y el conjunto $I = \{\{p, q\} \in F_2(P) : p \in S \text{ y } q \in J\}$. Notemos que este último conjunto es homeomorfo a $S \times J$, por los ejemplos 5 y 6, sabemos que $F_2(J)$ es homeomorfo a un triángulo y $F_2(S)$ es homeomorfo a una banda de Möbius, por lo que el modelo para la paleta es la unión de un cilindro, un triángulo y una banda de Möbius. Veamos como tienen que ser pegados estos modelos, un subcontinuo que pertenezca al cilindro y a la banda de Möbius tiene que ser un subcontinuo de S que contenga a v y que su única intersección con J sea v , de modo que la banda de Möbius debe pegarse con la curva cerrada simple de la base del cilindro. Por otro lado el modelo de $F_2(J)$ debe pagarse al cilindro en el arco que representa a los subcontinuos que contienen a v . Por lo que el modelo para $F_2(P)$ es como se muestra en la Figura 2.21.

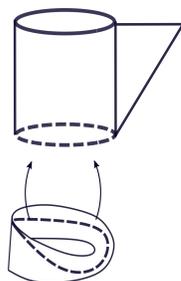


Figura 2.21: Modelo para $F_2(P)$.

Capítulo 3

Gráficas Finitas

En este capítulo, estudiamos la clase de los continuos, llamados gráficas finitas. Mostramos algunas caracterizaciones de las gráficas finitas y se dan algunas aplicaciones. En nuestras aplicaciones, caracterizamos continuos particulares, por ejemplo, damos una caracterización de las curvas cerradas simples.

3.1. Nociones básicas

Definición 3.1.1. Una **gráfica finita** es un continuo que puede ser escrito como la unión de un número finito de arcos, tales que cada dos de ellos son o bien disjuntos o bien se intersectan en uno o ambos puntos finales.

Ejemplo 3.1.2. *El intervalo $[0, 1]$, la circunferencia unitaria con centro en el origen S y el n -odo simple ($n \in \mathbb{N}$) son ejemplos de gráficas finitas que se usan con frecuencia dentro de este trabajo. (Ver Figura 3.1.)*

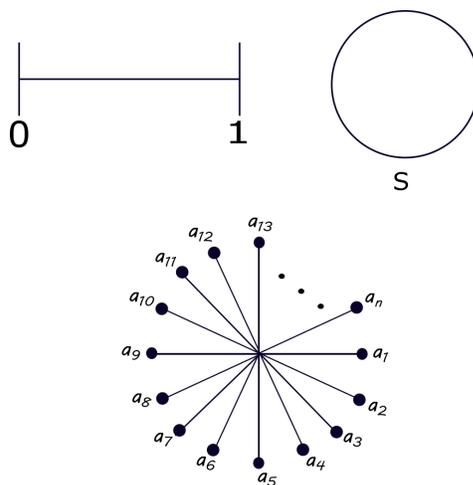


Figura 3.1: Ejemplos de Gráficas Finitas.

Proposición 3.1.3. *Si X y Y son gráficas finitas tales que $X \cap Y$ es no vacío y finito, entonces $X \cup Y$ es una gráfica finita.*

Demostración: Como X, Y son gráficas finitas, entonces son continuos que se pueden escribir como la unión finita de arcos. Así, dado que la intersección es no vacía y finita, entonces $X \cup Y$ es compacto y conexo. Por lo que $X \cup Y$ es un continuo.

Como $X \cap Y$ es una cantidad finita de puntos, $X \cup Y$ se puede ver como el número finito de arcos de X y de Y , más una cantidad finita de arcos (generada por la intersección de X y Y). Por tanto $X \cup Y$ es una gráfica. ■

Definición 3.1.4. Sean (X, τ) un espacio topológico y $A \subset X$. Sea β un número cardinal. Decimos que A es de **orden** menor o igual que β en X denotado por $ord(A, X) \leq \beta$, si para cada $U \in \tau$ tal que $A \subset U$ existe $V \in \tau$ tal que $A \subset V \subset U$ y $|\text{Bd}(V)| \leq \beta$.

Decimos que A es de orden β en X y será denotado por $ord(A, X) = \beta$ si $ord(A, X) \leq \beta$ y $ord(A, X) \not\leq \alpha$ para cualquier número cardinal $\alpha < \beta$. Si $A = \{p\}$, escribimos $ord(p, X)$ en lugar de $ord(\{p\}, X)$ y decimos que p es de orden β en X , en lugar de $\{p\}$ es de orden β en X . Claramente, $ord(p, X) = 1$ si y sólo si p es un punto final de X .

Definición 3.1.5. En una gráfica finita, a los puntos de orden uno los llamaremos **puntos finales**, a los puntos de orden dos los llamaremos puntos

ordinarios y a los de orden mayor que dos se les llama puntos de **ramificación o vértices**. El conjunto de puntos de ramificación de X es denotado por $R(X)$.

3.2. Caracterización de gráficas finitas

En esta sección daremos tres caracterizaciones de las gráficas en términos de la noción de orden. Además, obtendremos otros resultados, por ejemplo, la caracterización de una curva cerrada simple en términos de orden.

Observación: Las gráficas finitas son continuos de Peano. Por la definición una gráfica finita es la unión de un número finito de arcos que se intersecan en al menos un punto, sabemos que los arcos son continuos de Peano, entonces basta ver que los puntos de intersección son localmente conexos, en efecto, se p un punto de intersección y U una vecindad de p , como la intersección es finita, podemos encontrar un componente conexa C tal que $p \in C \subset U$, por lo que p es localmente conexo. Así, las gráficas finitas son continuos de Peano.

Proposición 3.2.1. *Si X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$, entonces todo subcontinuo de X es un subcontinuo de Peano. Por lo tanto todo subcontinuo de una gráfica es un continuo de Peano.*

Demostración: Supongamos que X es un continuo tal que $ord(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$.

Afirmación: ningún subcontinuo de X contiene continuos de convergencia. En efecto, de lo contrario existiría una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $A = \lim A_i = \limsup A_i = \liminf A_i$, por lo que existen U y V , tales que $A \subset U \subset V$, de donde se tiene que $|\text{Bd}_X(U)|$ es infinito, lo que contradice que $ord(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$. Entonces, ningún subcontinuo de X contiene continuos de convergencia. De la afirmación y el Teorema 1.1.4 cada subcontinuo de X es conexo en pequeño en x para todo $x \in X$. Por la Definición 1.2.1 cada subcontinuo de X es un continuo de Peano.

Ahora, si X es una gráfica, $ord(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$. Por lo que cada subcontinuo de una gráfica es un continuo de Peano. ■

La siguiente proposición caracteriza los continuos para los que cada uno de sus puntos tienen $\text{ord}(x, X) \leq 2$.

Proposición 3.2.2. *Sea X un continuo no degenerado. Entonces, el $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$ si y sólo si X es un arco o una curva cerrada simple.*

Demostración: Supongamos que $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$, entonces por la Proposición 3.2.1, X es un continuo de Peano. Nótese que X no contiene triodos simples, por el Teorema 1.2.9, X es un arco o una curva cerrada simple.

Supongamos que X es una curva cerrada simple o un arco. Si X es una curva cerrada simple, $\text{ord}(x, X) = 2$ para todo $x \in X$. Por otro lado, si X es un arco, existen sólo dos tipos de puntos que tiene X , los dos puntos finales y los puntos ordinarios. Así, $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$. ■

El siguiente corolario es una caracterización de la curva cerrada simple.

Corolario 3.2.3. *Un continuo X es una curva cerrada simple si y sólo si cada punto tiene orden dos en X .*

Demostración: Supongamos que X es una curva cerrada simple, por la proposición anterior $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$, como X no tiene puntos finales, entonces, $\text{ord}(x, X) = 2$ para todo $x \in X$. Ahora supongamos que $\text{ord}(x, X) = 2$ para cada $x \in X$, entonces, X no tiene puntos finales, por lo tanto X es una curva cerrada simple. ■

Lema 3.2.4. *Sea X un continuo de Peano y sea $p \in X$ tal que $\text{ord}(p, X) = n < \aleph_0$. Entonces hay una base local numerable $\{B_i : i = 1, 2, \dots\}$ en p tal que B_i es un subconjunto abierto conexo de X y $|\text{Bd}_X(B_i)| = n$, para cada $i = 1, 2, \dots$.*

Demostración: Como $\text{ord}(p, X) = n < \aleph_0$, entonces por la Definición 3.1.4 existe una base local numerable $\{U_i : i = 1, 2, \dots\}$ en p tal que para cada $i \in \mathbb{N}$:

- (1) U_i es abierto en X ;
- (2) $\text{diam}(U_i) < \frac{1}{i}$;
- (3) $|\text{Bd}_X(U_i)| = n$.

Sea V_i la componente de U_i que contiene a p , dado que X es un continuo de Peano y por (1), tenemos que cada V_i es abierto en X . Ahora, por el Teorema de los golpes de Frontera, tenemos que

(4) $\text{Bd}_X(V_i) \subset \text{Bd}_X(U_i)$ para cada $i = 1, 2, \dots$;

(5) $\{V_i : i = 1, 2, \dots\}$ es base local de p .

Por (3) y (4) concluimos que $|\text{Bd}_X(V_i)| \leq |\text{Bd}_X(U_i)| = n$. Por lo tanto, para cada $i = 1, 2, \dots$ $|\text{Bd}_X(V_i)| \leq n$. Además, ya que el $\text{ord}(p, X) = n$, notemos por (2) y (5) que $|\text{Bd}_X(V_i)| < n$ para sólo un número finito de i 's. Entonces, existe N tal que $|\text{Bd}_X(V_i)| = n$ para todo $i \geq N$. Haciendo $B_i = V_{N+i}$ para cada $i = 1, 2, \dots$ obtenemos los conjuntos B_i con las propiedades deseadas. ■

Lema 3.2.5. *Sea X un continuo con exactamente un punto p de orden ≥ 3 en X . Si $\text{ord}(p, X) = n < \aleph_0$, entonces p es un vértice de un n -odo simple el cual es una vecindad de p en X .*

Demostración: Como $\text{ord}(p, X) = n < \aleph_0$ para todo $p \in X$ y además X es un continuo, por la Proposición 3.2.1, tenemos que X es un continuo de Peano. Entonces, existe una base local numerable $\{B_i : i = 1, 2, \dots\}$ en p tal que B_i es un subconjunto conexo abierto de X y $|\text{Bd}_X(B_i)| = n$, para cada $i = 1, 2, \dots$. Si para cada i hay un punto $x_i \in \text{Bd}_X(B_i)$ tal que x_i no es un punto límite de $X - B_i$, entonces $\{B_i \cup \{x_i\} : i = 1, 2, \dots\}$ sería una colección de subconjuntos abiertos de X formando una base local en p tal que $|\text{Bd}_X(B_i \cup \{x_i\})| = n - 1$ para cada $i = 1, 2, \dots$ lo cual es una contradicción al hecho de que $\text{ord}(p, X) = n$. Entonces, existe k tal que se cumplen las siguientes afirmaciones:

(1) cada $q_j \in \text{Bd}_X(B_k)$, $1 \leq j \leq n$, es un punto límite de $X - B_k$.

Por la Proposición 3.2.1 y por el Teorema 1.2.2,

(2) $\text{Cl}_X(B_k)$ es arco conexo;

por la Proposición 3.2.1 y por el Teorema 1.2.4,

(3) X es localmente arco-conexo en cada q_j ;

(4) $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \neq p$.

Por (1), (3) y (4), se tiene

(5) cada q_j debe ser un punto final de algún arco en $\text{Cl}_X(B_k)$ al cual q_j pertenece.

Por (2), hay un arco A_j en $\text{Cl}_X(B_k)$ con p y q_j puntos finales para cada $i = 1, 2, \dots, n$. De (4) y (5) se sigue que $A_l \cap A_m = \{p\}$ cuando $l \neq m$.

Entonces, $\bigcup_{j=1}^n A_j$ es un n -odo simple con vértice p . Como $\text{ord}(p, X) = n$, se

sigue, usando (2), (4) y (5), que $B_k = \bigcup_{j=1}^n A_j$. Esto completa la prueba. ■

Teorema 3.2.6. *Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si se cumplen las siguientes:*

- (1) $\text{ord}(x, X) < \aleph_0$ para todo $x \in X$;
- (2) $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in X$, excepto un número finito.

Demostración: Si X es una gráfica finita, entonces por definición tenemos que X satisface (1) y (2).

Ahora vamos a suponer que se cumplen (1) y (2). Notemos que si Y es un continuo que no contiene puntos de orden ≥ 3 en Y , entonces por la Proposición 3.2.2, Y es un arco o una curva cerrada simple. Por lo tanto, Y es una gráfica finita. Asumiendo inductivamente, que si Y es un continuo que satisface (1) y (2) con a lo más k puntos de orden ≥ 3 en Y , entonces Y es una gráfica finita.

Ahora, sea Z un continuo que satisface (1) y (2) con exactamente $k+1$ puntos p_i , $1 \leq i \leq k+1$ de orden ≥ 3 en Z . Como Z satisface (1), por la Proposición 3.2.1, Z es un continuo de Peano. Por lo tanto, existe un subconjunto abierto conexo U de Z tal que $p_i \in U$ y $p_i \notin \text{Cl}_Z(U)$ para cualquier $i \neq 1$. Notemos que $\text{Cl}_Z(U)$ es un continuo y p_1 es el único punto de $\text{Cl}_Z(U)$ de orden ≥ 3 en $\text{Cl}_Z(U)$. Hagamos $n = \text{ord}(p_1, \text{Cl}_Z(U))$ (notemos que $n < \aleph_0$ pues Z satisface (1)). Entonces, por el Lema 3.2.5, p_1 es el vértice de un n -odo simple el cual es una vecindad de p_1 en $\text{Cl}_Z(U)$ y por tanto en Z . Así, hay un subconjunto abierto conexo V de Z tal que $p_1 \in V$, $\text{Cl}_Z(V)$ es un n -odo simple y $|\text{Bd}_Z(V)| = n$, entonces $\text{Bd}_Z(Z - V) = \text{Bd}_Z(V)$ por lo que $Z - V$ tiene a lo más n componentes, digamos K_1, \dots, K_j con $1 \leq j \leq n$. Como $p_1 \notin K_i$ para cualquier i , tenemos por inducción que cada K_i es una gráfica finita. Además, por el Teorema 1.1.2 (con $X = Z$, $E = Z - V$) cada $K_i \cap \text{Cl}_Z(V) \neq \emptyset$ y ya que $K_i \cap \text{Cl}_Z(V) \subset \text{Bd}_Z(V)$, cada $K_i \cap \text{Cl}_Z(V)$ es finita. Como $\text{Cl}_X(V)$ es una gráfica finita, por la Proposición 3.1.3 cada $K_i \cap \text{Cl}_Z(V)$ es una gráfica finita. Entonces, ya que $(\text{Cl}_Z(V) \cup K_i) \cap K_2 = \text{Cl}_Z(V) \cap K_2$, por la Proposición 3.1.3, $(\text{Cl}_Z(V) \cup K_i) \cup K_2$ es una gráfica finita. Continuando de esta manera, aplicando j -veces la Proposición 3.1.3, tenemos que Z es una gráfica finita. Por tanto, por inducción, se ha probado que si un continuo satisface (1) y (2), entonces es una gráfica finita. ■

Corolario 3.2.7. *Todo subcontinuo de una gráfica finita es una gráfica finita.*

Demostración: Sea X una gráfica finita y Y un subcontinuo de X por la Proposición 3.2.1, Y es un continuo de Peano. Dado que Y es subcontinuo de X , se tiene que $ord(x, Y) \leq ord(x, X) < \aleph_0$, entonces $ord(x, Y) < \aleph_0$. Además, $ord(x, Y) \leq 2$ para toda $x \in Y$, pues $ord(x, X) \leq 2$ para toda $x \in X$. Por tanto, por el Teorema 3.2.6, Y es una gráfica finita. ■

El siguiente lema se usará, para caracterizar a las gráficas finitas en términos de orden.

Lema 3.2.8. *Sea X un continuo tal que existen puntos $x_i \in X, i = 1, 2, \dots$, que satisfacen*

$$ord(x_i, X) \geq 3 \text{ para cada } i \text{ y } x_i \neq x_j \text{ cuando } i \neq j.$$

Entonces, existe un subcontinuo K de X tal que $ord(K, X) \geq \aleph_0$ y si X es un continuo de Peano, hay un subcontinuo L de X tal que $|L^{[1]}| \geq \aleph_0$ (recordemos que $L^{[1]}$ es el conjunto de puntos finales de L , véase la Definición 1.1.5).

Demostración: Si X no es de Peano, por el Teorema 1.1.4, existe $p \in X$ tal que $ord(p, X) \geq \aleph_0$. La primera parte del Lema queda probada si consideremos a $K = \{p\}$.

Ahora, asumamos que X es un continuo de Peano. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$ converge a un punto $x \in X$ con $x_i \neq x$ para todo i . Por la Definición 1.2.1, existen subconjuntos abiertos conexos U_i de X tales que:

$$x_i \in U_i, \text{diam}(U_i) \leq \frac{1}{i}, U_i \cap U_j = \emptyset \text{ para } i \neq j.$$

Una de las siguientes situaciones se cumple

- (a) existe un arco A en X tal que $x_i \in A$ para una cantidad infinita de i 's;
- (b) ningún arco en X contiene x_i para una cantidad infinita de i 's.

Primero supongamos, sin pérdida de generalidad, que se cumple (a) para toda i . Por hipótesis se tiene que $ord(x_i, X) \geq 3$ para cada i y por ser A un arco, $ord(x_i, A) \leq 2$, así que existe $p_i \in U_i - A$ para cada i . Por el Teorema 1.2.5, para cada i existe un arco A_i en U_i tal que A_i tiene como puntos finales a x_i y p_i .

$$\text{Sean } K = A \text{ y } L = A \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Notemos que K es un subcontinuo de X el cual cumple que $ord(K, X) \geq \aleph_0$ y por la elección de L se tiene que $|L^{[1]}| \geq \aleph_0$.

Ahora supongamos que se cumple (b), entonces por el Teorema 1.2.4 se sigue que X es LAC en x y $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a x , existen arcos $B_n, n = 1, 2, \dots$ con puntos finales x y $x_{i(n)}$ tales que $\text{diam}(B_n) \leq \frac{1}{n}$ y $x_{i(n)} \notin B_j$ para todo $j \neq n$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea C_n un subarco propio de B_n tal que x es uno de los puntos finales de C_n y $C_n \cap U_{i(n)} \neq \emptyset$. Sea $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = L$. Por la elección de K y L , se tiene que cumplen con las propiedades deseadas. Por lo que el Lema queda demostrado. ■

Teorema 3.2.9. *Un continuo X es una gráfica finita si y sólo si $\text{ord}(A, X) < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X .*

Demostración: Suponiendo que X es una gráfica finita entonces, tenemos que $\text{ord}(A, X) < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X . Ahora, supongamos que X es un continuo tal que $\text{ord}(A, X) < \aleph_0$ para todo subcontinuo A de X . Entonces $\text{ord}(x, X) < \aleph_0$ para $x \in X$.

Afirmación: $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para casi todo $x \in X$ excepto una cantidad finita.

En efecto, de lo contrario por el Lema 3.2.8, existiría un subcontinuo K de X tal que $\text{ord}(K, X) \geq \aleph_0$, lo cual contradice la hipótesis.

Por lo que tenemos un continuo tal que:

- i) $\text{ord}(x, X) \leq \aleph_0$ para todo $x \in X$;
- ii) $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para casi todo, excepto una cantidad finita de $x \in X$.

Por tanto, por el Teorema 3.2.6, tenemos que X es una gráfica finita. ■

Teorema 3.2.10. *Un continuo de Peano X es una gráfica finita si y sólo si cada subcontinuo de X tiene únicamente una cantidad finita de puntos finales.*

Demostración: Supongamos que X es una gráfica finita. Por definición X es la unión finita de arcos, entonces se tiene una cantidad finita de puntos finales, como consecuencia, todo subcontinuo de X tiene únicamente una cantidad finita de puntos finales. Ahora, supongamos que X es un continuo de Peano tal que cada subcontinuo de X tiene únicamente una cantidad finita de

puntos finales. Entonces, por la segunda parte del Lema 3.2.8, X satisface (2) del Teorema 3.2.6. Supongamos que X no satisface (1) del Teorema 3.2.6, es decir, $\text{ord}(p, X) \geq \aleph_0$ para algún $p \in X$. Por el inciso (2) de la demostración del Lema 3.2.4, existe un subconjunto abierto conexo U de X tal que $p \in U$, $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in U - \{p\}$ y $\text{diam}(U) < 1$. Sea $p_1 \in U - \{p\}$. Entonces por el Teorema 1.2.5 existe un arco A_1 en U con puntos finales p y p_1 . Por inducción supongamos que se definen n arcos A_i , $1 \leq i \leq n$ con puntos finales p y p_i tales que para cada i ,

$$\text{diam}(A_i) < \frac{1}{i}, A_i \cap A_j = \{p\} \text{ si } i \neq j.$$

Sea V un subconjunto abierto conexo de U tal que $p \in V$ y $p_i \notin V$ para todo i y $\text{diam}(V) < \frac{1}{(n+1)}$. Ya que $V \subset U$, $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in V - \{p\}$. Usando la hipótesis de inducción y notando que $\text{ord}(p, X) > n$, existe $p_{n+1} \in V - \bigcup_{i=1}^n A_i$. Por el Teorema 1.2.5, existe un arco A_{n+1} en V con puntos finales p y p_{n+1} , y dado que $\text{ord}(x, X) \leq 2$ para todo $x \in V - \{p\}$ y $p_i \notin A_{n+1}$ para cualquier i , obtenemos que $A_{n+1} \cap A_i = \{p\}$ para cada $i = 1, \dots, n$. Así, de forma inductiva definamos arcos A_i , $i = 1, 2, 3, \dots$, tales que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ es un subcontinuo de X con una cantidad infinita de puntos finales, lo cual es una contradicción, pues cada subcontinuo de X tiene únicamente una cantidad finita de puntos finales.

Con esto concluimos que X satisface (1) y (2) del Teorema 3.2.6. Por tanto, X es una gráfica finita. ■

Capítulo 4

Productos simétricos de gráficas finitas

En este capítulo, daremos una serie de resultados para poder demostrar que las gráficas finitas tienen n -ésimo producto simétrico único. Para lograr nuestro objetivo, dividiremos el trabajo en dos casos; el primero para $n \geq 4$ y el segundo para $n \leq 3$.

4.1. Resultados en continuos de Peano

Antes de comenzar daremos las siguientes definiciones.

Definición 4.1.1. Cuando los dos puntos finales de una arista coinciden, esta arista es una curva cerrada simple y son llamadas **lazos**.

Definición 4.1.2. Se dice que dos puntos de X p y q son **adyacentes**, si existe una arista J de X tal que p y q son puntos finales de J .

Dado un continuo X , definimos los siguientes conjuntos:

$$\mathcal{E}_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \text{ tiene una vecindad en } F_n(X) \text{ la cual es una } n - \text{celda}\}.$$

Para un subconjunto C de X , sea $F_n(C) = \{A \in F_n(X) : A \subset C\}$.

Lema 4.1.3. *Si Z es un continuo de Peano y $A \in \mathcal{E}_n(Z)$, entonces ningún punto de A es vértice de un triodo simple.*

Demostración: Supongamos que existe $A \in \mathcal{E}_n(Z)$ que contiene un punto p que es el vértice de un triodo simple T_0 de Z . Veamos que cada vecindad U de A en $F_n(Z)$ contiene una copia topológica del producto $T \times [0, 1]^{n-1}$, donde T es un triodo simple.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que $B_{F_n(Z)}(\varepsilon, A) \subset U$. Supongamos que $A = \{p, x_2, \dots, x_m\}$ donde $m \leq n$ y p, x_2, \dots, x_m son todos distintos. Eligiendo puntos apropiados cerca de x_m , existe $B \in B_{F_n(Z)}(\varepsilon, A)$ tal que $B = \{p, x_2, \dots, x_n\}$ y los puntos p, x_2, \dots, x_n son todos diferentes.

Eligiendo $\delta > 0$ tal que $B_Z(\delta, p), B_Z(\delta, x_2), \dots, B_Z(\delta, x_n)$ son disjuntos dos a dos y $B_{F_n(Z)}(\delta, B) \subset U$. Escogemos arcos I_2, I_3, \dots, I_n de Z tales que $x_i \in I_i$ y $\text{diam}(I_i) < \delta$ para cada $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. Finalmente, elegimos un subtriodo simple T de T_0 tal que p es el vértice de T y $\text{diam}(T) < \delta$.

Entonces $\langle T, I_2, I_3, \dots, I_n \rangle_n \subset B_{F_n(Z)}(\delta, B) \subset U$. Notemos que T, I_2, I_3, \dots, I_n son disjuntos dos a dos, pues todos los puntos de B son diferentes.

Afirmación: $T \times I_2 \times \dots \times I_n$ es homeomorfo a $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n$.

Sea $h : \langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n \longrightarrow T \times I_2 \times \dots \times I_n$ definida como $h(\{t_1, t_2, \dots, t_n\}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$. Primero veamos que h es continua. Sean J_1 abierto en T , J_2 abierto en I_2 , \dots , J_n abierto en I_n , entonces $V = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ es abierto en $T \times I_2 \times \dots \times I_n$. Notemos que

$$h^{-1}(V) = \{\{j_1, j_2, \dots, j_n\} \mid j_i \in J_i \text{ para cada } i \in \{1, 2, \dots, n\}\} = \langle J_1, J_2, \dots, J_n \rangle_n$$

el cual es abierto en $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n$, pues cada J_i es abierto, por tanto h es continua, de manera similar vemos que h^{-1} es continua. Por otro lado, para ver que h es biyectiva, basta observar que cada elemento de $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n$ puede ser escrito de forma única $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, por tanto $T \times I_2 \times \dots \times I_n$ es homeomorfo a $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n$.

Dado que $\langle T, I_2, \dots, I_n \rangle_n \subset U$, entonces $T \times I_2 \times \dots \times I_n$ puede ser encajado en U .

Por el Teorema 1.0.6, U no puede ser encajado en \mathbb{R}^n , lo que contradice la hipótesis, pues A tiene una vecindad U que es una n -celda y $U \subset \mathbb{R}^n$. ■

Observación 4.1.4. *Sea H un continuo de Peano. Si $\text{ord}(p, H) \geq n$, existen n arcos, p_1, \dots, p_n , los cuales son disjuntos excepto en p .*

Lema 4.1.5. *Si Z es un continuo de Peano el cual no es una gráfica finita, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$, Z contiene una gráfica finita con al menos k aristas.*

Demostración: En el caso en el que existan arcos α y β en Z tales que $\alpha \cap \beta$ tiene un número infinito de componentes, tenemos que $\alpha - (\alpha \cap \beta)$ tiene un número infinito de componentes. Si podemos elegir k componentes J_1, J_2, \dots, J_k de $\alpha - (\alpha \cap \beta)$ entonces $\beta \cup (J_1 \cup J_2 \cup \dots \cup J_k)$ es una gráfica finita. En este caso habremos terminado.

Por lo que vamos a asumir que $\alpha \cap \beta$ tiene un número finito de componentes para cualesquiera arcos α y β en Z . Bajo esta suposición, si α y β son arcos en Z y $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$, tenemos que $\alpha \cup \beta$ es una gráfica finita.

Por el Teorema 3.2.6, Z tiene una de las siguientes propiedades:

- (a) Existe un número infinito de puntos $p \in Z$ tales que $ord(p, Z) > 2$;
- (b) Existe un punto $q \in Z$ tal que $ord(q, Z) \geq \aleph_0$.

Supongamos que se cumple (a). En este caso existe una sucesión de puntos $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ tal que $ord(p_m, Z) > 2$ para cada $m \in \mathbb{N}$ y los puntos p_m son todos diferentes. Por la Observación 4.1.4, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe un triodo simple T_m tal que p_m es el vértice de T_m . Fijando un punto $p \in Z$. Para cada $i \in \{1, \dots, k+1\}$, sea α_i el arco que une a p y a p_i . Por la primera parte de la demostración, el continuo $Y = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k+1} \cup T_1 \cup \dots \cup T_{k+1}$ es una gráfica finita. Ya que cada uno de los puntos p_i es un punto de ramificación de Y y contiene al menos $k+1$ puntos de ramificación. Así, Y contiene al menos k aristas.

Ahora supongamos que se cumple (b). Ya que existe un punto $q \in Z$ tal que $ord(q, Z) \geq \aleph_0$, por la Observación 4.1.4, q es vértice de un k -odo simple Y . Por lo tanto Y contiene al menos k aristas, con lo que se concluye la prueba. ■

Lema 4.1.6. *Si α es un arco en $F_n(Z)$ y α une a los elementos A y B , entonces la unión $\cup \alpha$ tiene un número finito de componentes, cada una de ellas es localmente conexa e intersecta a ambos conjuntos A y B .*

Demostración: Supongamos que α es un arco en $F_n(Z)$ que une a los elementos A y B .

Afirmación: Dada C es una componente de $\cup \alpha$ y $D \in \alpha$, se tiene que $D \cap C \neq \emptyset$.

En efecto, si $D \cap C = \emptyset$ consideramos los conjuntos $\mathcal{A}_C = \{A \in \alpha : A \cap C \neq \emptyset\}$ y $\mathcal{B}_C = \{A \in \alpha : A \cap C = \emptyset\}$. Así, como C es una componente $\mathcal{A}_C \neq \emptyset$ y

$D \in \mathcal{B}_C$. Por lo tanto $\alpha = \mathcal{A}_C \cup \mathcal{B}_C$ y $\mathcal{A}_C \cap \mathcal{B}_C = \emptyset$ por lo que hemos encontrado una desconexión de α , contradiciendo al hecho de que α es un arco. Por lo que $\cup\alpha$ tiene un número finito de componentes, más aún $\cup\alpha$ tiene a lo más n componentes. Ahora dado que tenemos una cantidad finita de componentes en $\cup\alpha$ y por el Lema 1.1.22 es localmente conexa, entonces cada una de estas componentes es localmente conexa. Finalmente como A y B pertenecen al arco α , A y B son intersectadas por cada una de las componentes. ■

Teorema 4.1.7. *Un continuo de Peano Z es una gráfica finita si y sólo si, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(Z)$ es un subconjunto abierto denso de $F_n(Z)$ con un número finito de componentes.*

Demostración: Primero supongamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{E}_n(Z)$ es un subconjunto abierto denso de $F_n(Z)$, con r componentes, ($r \in \mathbb{N}$) y Z no es una gráfica finita. Ya que $F_n(Z)$ es un continuo de Peano, las componentes de $\mathcal{E}_n(Z)$ son arco-conexas. Por el Lema 4.1.5, existe una gráfica finita $Y \subset Z$ tal que Y contiene al menos $k = 2r + 1$ aristas. Eligiendo diferentes aristas J_1, \dots, J_k de Y y puntos $p_i \in \text{Int}_Y(J_i)$, para cada $i \in \{1, \dots, k\}$, consideremos subconjuntos abiertos conexos y disjuntos dos a dos V_1, \dots, V_k de Z tales que $p_i \in V_i$ y $V_i \cap Y \subset \text{Int}_Y(J_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, k\}$. Como $\{p_i\} \in \langle V_i \rangle_n$ y $\mathcal{E}_n(Z)$ es denso, se puede elegir un elemento $A_i \in \langle V_i \rangle_n \cap \mathcal{E}_n(Z)$.

Ya que $\mathcal{E}_n(Z)$ tiene r componentes y tiene $2r + 1$ conjuntos A_1, \dots, A_{2r+1} , por el principio de las casillas, existe una componente \mathcal{C} de $\mathcal{E}_n(Z)$ que tiene tres de los conjuntos A_i . Podemos asumir que A_1, A_2 y A_3 pertenecen a \mathcal{C} . Ya que \mathcal{C} es arco-conexo, existen arcos α_1 y α_2 en \mathcal{C} tales que α_1 une a A_3 con A_1 y α_2 une a A_3 con A_2 . Elegimos un punto $x \in A_3$. Sean C_1 y C_2 las componentes de $\cup\alpha_1$ y $\cup\alpha_2$ respectivamente, tal que $x \in C_1 \cap C_2$. Por el Lema 4.1.6, el conjunto $C = C_1 \cup C_2$ es un subconjunto localmente conexo de $(\cup\alpha_1) \cup (\cup\alpha_2)$ que intersecta a A_1, A_2 y A_3 .

Cada punto $p \in C$ pertenece a un elemento de $\mathcal{E}_n(Z)$. Por el Lema 4.1.3, p no es el vértice de algún triodo simple de Z . En particular, C es un continuo de Peano sin triodos simples, por lo tanto C es un arco o una curva cerrada simple. En cualquiera de los dos casos, podemos concluir que existe un arco Z el cual intersecta a los tres conjuntos A_1, A_2 y A_3 . Para el resto de la demostración podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que existen un arco $\beta \subset C$ y puntos $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ y $a_3 \in (A_3 \cap \beta) - \{a_1, a_2\}$ tales que β une a a_1 con a_2 . Ya que $a_3 \in V_3$ y V_3 es arco-conexo, existe un arco α en V_3 que une a a_3 con p_3 . Dado que los puntos finales de β no están en V_3 , los

puntos finales de β no están en α .

Como los puntos finales de β no son vértices de triodos simples de Z , tenemos que $\alpha \subset \beta$. Así, β intersecta a la arista J_3 la cual es un arco o una curva cerrada simple. Notemos que J_3 contiene un vértice v de Y el cual es vértice de un triodo simple en Z , por ser J_3 una arista, de modo que $v \notin \beta$. Por lo que J_3 no está contenida en β . Ya que β no contiene vértices de triodos simples, uno de los puntos finales de β pertenece a J_3 . Podemos asumir que $a_1 \in J_3$. Entonces $a_1 \in V_1 \cap J_3$. Pero V_1 fue elegido de tal manera que $V_1 \cap Y \subset \text{Int}_Y(J_1)$. Así, $a_1 \in J_3 \cap \text{Int}_Y(J_1)$, lo cual es imposible ya que J_1 y J_3 son aristas diferentes de una gráfica finita Y . Esta contradicción muestra que Z es una gráfica finita.

Ahora supongamos que Z es una gráfica finita y sea n un entero positivo arbitrario. Probaremos que $\mathcal{E}_n(Z)$ es un subconjunto abierto denso en $F_n(Z)$ con un número finito de componentes.

Sea

$$\mathcal{G} = \{A \in F_n(Z) : A \text{ no contiene puntos de ramificación de } Z \text{ y } |A| = n\}.$$

Dada $A = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathcal{G}$, sean J_1, \dots, J_n arcos disjuntos dos a dos de Z tales que $J_1 \cup \dots \cup J_n$ no contiene puntos de ramificación de Z y $p_i \in \text{Int}_Z(J_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Consideremos el homeomorfismo de $J_1 \times \dots \times J_n$ a $\langle J_1, \dots, J_n \rangle_n$ el cual manda (x_1, \dots, x_n) a $\{x_1, \dots, x_n\}$, de manera que $\langle J_1, \dots, J_n \rangle_n$ es homeomorfo a una n -celda la cual es una vecindad de A en $F_n(Z)$. Así, $A \in \mathcal{E}_n(Z)$. Con lo anterior se ha mostrado que $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}_n(Z)$.

Afirmación 1: \mathcal{G} es denso en $F_n(Z)$.

Sea $\langle U_1, \dots, U_m \rangle_n$ un abierto básico en $F_n(Z)$. Como cada U_i es abierto en Z y Z es una gráfica finita, podemos elegir $p_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $\text{ord}(p_i, Z) \leq 2$ y $p_i \neq p_j$, si $i \neq j$. Si $m = n$, entonces $A = \{p_1, \dots, p_m\} \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle_n \cap \mathcal{G}$. En caso contrario, elegimos $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_n \in U_1$ tales que $\text{ord}(p_i, Z) \leq 2$, $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$ para $i, j \in \{m+1, m+2, \dots, n\}$. Así, $A = \{p_1, \dots, p_m\} \cap \mathcal{G}$. Por lo tanto \mathcal{G} es denso en $F_n(Z)$.

Afirmación 2: $\mathcal{E}_n(Z)$ es abierto.

Sea $A = \{p_1, \dots, p_m\} \in \mathcal{E}_n(Z)$ con $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Por el Lema 4.1.4, A no contiene puntos de ramificación de Z y como Z es una gráfica finita el $\text{ord}(p_i) \leq 2$ para todo $i = 1, \dots, m$, por lo que $m = n$, de lo contrario A no tendría una n -celda como vecindad. Por lo tanto, podemos elegir I_1, \dots, I_n arcos disjuntos en Z tales que $p_i \in I_i$ para cada $i = 1, \dots, n$.

Consideremos el homeomorfismo $f : I_1 \times \cdots \times I_n \rightarrow \langle I_1, \dots, I_n \rangle_n$ definido como $f(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$, entonces $\langle I_1, \dots, I_n \rangle_n$ es homeomorfo a una n -celda y contiene a A . Notemos que $\langle I_1, \dots, I_n \rangle_n \subset \mathcal{E}_n(Z)$. Así, $\mathcal{E}_n(Z)$ es abierto.

Por tanto, por las afirmaciones 1 y 2 y dado que $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}_n(Z)$, $\mathcal{E}_n(Z)$ es un subconjunto abierto denso en $F_n(Z)$.

Sean E_1, \dots, E_m aristas diferentes de Z y $k(i_1, \dots, i_m)$ el subconjunto de $F_n(Z)$ tal que cada miembro de $k(i_1, \dots, i_m)$ tiene exactamente i_j elementos en el interior de la arista E_j para $j \in \{1, \dots, m\}$.

Afirmación 3: Cada $k(i_1, \dots, i_m)$ es conexo.

Dados dos elementos $A, B \in k(i_1, \dots, i_m)$ tenemos que tiene el mismo número de elementos (i_j) en la arista E_j , sin pérdida de generalidad, considerando a $\{a_1, \dots, a_{i_j}\} \subseteq A$ y $\{b_1, \dots, b_{i_j}\} \subseteq B$, por conexidad en E_j podemos considerar el arco α_1 que une a a_1 con b_1 , el arco α_2 que une a a_2 con b_2 y así sucesivamente, continuando con este procedimiento para cada elemento de $k(i_1, \dots, i_m)$ podemos encontrar un arco α_j que une a a_j con b_j . Por lo que $k(i_1, \dots, i_m)$ es conexo.

En el caso que $i_1 + \cdots + i_m = n$, $k(i_1, \dots, i_m) \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{E}_n(Z)$ y la unión de todos los conjuntos $k(i_1, \dots, i_m)$ con $i_1 + \cdots + i_m = n$ es denso en $\mathcal{E}_n(Z)$. Ya que $\mathcal{E}_n(Z)$ es un subconjunto abierto del continuo de Peano $F_n(Z)$, $\mathcal{E}_n(Z)$ es localmente arco-conexo. Así, cada componente de $\mathcal{E}_n(Z)$ intersecta un conjunto de la forma $k(i_1, \dots, i_m)$. Ya que únicamente hay un número finito de conjuntos $k(i_1, \dots, i_m)$, pues hay un número finito de aristas, $\mathcal{E}_n(Z)$ tiene un número finito de componentes. ■

Corolario 4.1.8. *Si los continuos X y Y tienen productos simétricos homeomorfos $F_n(X)$ y $F_n(Y)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, entonces X es una gráfica finita si y sólo si Y es una gráfica finita.*

Demostración: Sea h un homeomorfismo entre $F_n(X)$ y $F_n(Y)$. Notemos que $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. Por el teorema anterior, tenemos que como X es una gráfica finita entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E}_n(X)$ es un subconjunto abierto denso de $F_n(X)$ con un número finito de componentes, entonces por el homeomorfismo $\mathcal{E}_n(Y)$ es abierto denso y con un número finito de componentes en $F_n(Y)$. Por lo tanto, del Teorema 4.1.7, Y es una gráfica finita. ■

4.2. El caso $n \geq 4$

Antes de iniciar notemos que $R(S) = \emptyset$ para una curva cerrada simple S . Dada una gráfica finita X y $n \in \mathbb{N}$, sea

$$R_n(X) = \{A \in F_n(X) : A \cap R(X) \neq \emptyset\}.$$

Observemos que $R_1(X) = F_1(R(X))$.

Lema 4.2.1. Sean X una gráfica finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces las componentes de $F_n(X) - R_n(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n$ donde I_1, \dots, I_r son aristas diferentes dos a dos de X y $r \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración: Tomando aristas disjuntas dos a dos I_1, \dots, I_r . Entonces $\text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r)$ son abiertos conexos y disjuntos dos a dos. Veamos que $\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n$ es conexo, para ello consideraremos la función $f : X^n \rightarrow F_n(X)$ dada por $f(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Afirmación 1: Si $\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n \neq \emptyset$, entonces $r \leq n$.

En efecto, ya que si $A \in \langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle$ entonces por definición A debe intersectar a I_i para cada $i = \{1, \dots, r\}$ además $A \subseteq \bigcup_{i=1}^r \text{Int}_X(I_i)$, pero

$A \in F_n(X)$, por lo que $r \leq n$.

Afirmación 2: Si $\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} & \langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n \\ &= \bigcup \{f(\text{Int}_X(I_{i_1}) \times \dots \times \text{Int}_X(I_{i_n})) : \{I_1, \dots, I_r\} = \{I_{i_1}, \dots, I_{i_n}\}\}. \end{aligned}$$

Eligiendo elementos $p_1 \in \text{Int}_X(I_1), \dots, p_r \in \text{Int}_X(I_r)$. Entonces $\{p_1, \dots, p_r\}$ está en la imagen de cada conjunto de la forma $(\text{Int}_X(I_{i_1}) \times \dots \times \text{Int}_X(I_{i_n}))$ bajo f , donde $\{I_1, \dots, I_r\} = \{I_{i_1}, \dots, I_{i_n}\}$. Ya que $f(\text{Int}_X(I_{i_1}) \times \dots \times \text{Int}_X(I_{i_n}))$ es conexo, concluimos que $\langle \text{Int}_X(I_{i_1}), \dots, \text{Int}_X(I_{i_n}) \rangle_n$ es conexo y abierto.

Notemos que si $\{I_1, \dots, I_r\} \neq \{J_1, \dots, J_s\}$ entonces

$$\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n \cap \langle \text{Int}_X(J_1), \dots, \text{Int}_X(J_s) \rangle_n = \emptyset.$$

Finalmente, ya que $X - R(X) = \bigcup \{\text{Int}_X(J) : J \text{ es una arista de } X\}$ se sigue que la unión de todos los conjuntos de la forma $\langle \text{Int}_X(I_1), \dots, \text{Int}_X(I_r) \rangle_n$ es igual a $F_n(X) - R_n(X)$. ■

Lema 4.2.2. Sean X una gráfica finita y $A \in F_n(X) - (F_{n-1}(X) \cup R_n(X))$. Entonces A tiene una vecindad en $F_n(X)$ la cual es homeomorfa a una n -celda $n \in \mathbb{N}$, es decir, $A \in \mathcal{E}_n(X)$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Demostración: Dado que $A \in F_n(X) - (F_{n-1}(X) \cup R_n(X))$, tenemos que A tiene exactamente n elementos y no tiene puntos de ramificación. Supongamos que $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Consideremos J_1, \dots, J_n arcos disjuntos de X tales que $J_1 \cup \dots \cup J_n$ no contienen puntos de ramificación de X y $a_i \in \text{Int}_X(J_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Considerando el homeomorfismo $h : J_1 \times \dots \times J_n \rightarrow \langle J_1, \dots, J_n \rangle_n$ definido como $h(x_1, \dots, x_n) = \{x_1, \dots, x_n\}$ se tiene que $\langle J_1, \dots, J_n \rangle_n$ es homeomorfo a una n -celda, la cual es una vecindad de A en $F_n(X)$. ■

Lema 4.2.3. Sean X una gráfica finita, $A \in F_{n-1}(X)$ y $n \geq 4$. Entonces ninguna vecindad de A en $F_n(X)$ se puede encajar en \mathbb{R}^n .

Demostración: Sea U una vecindad de A en $F_n(X)$. Ya que $A \in F_{n-1}(X)$, es posible encontrar diferentes puntos p_1, \dots, p_{n-1} de X y subarcos disjuntos I_1, \dots, I_{n-1} de X tales que $p_i \in I_i$, p_i no es punto final de I_i , para cada $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $\langle I_1, \dots, I_{n-1} \rangle_n \subset U$. Dada $i \in \{1, \dots, n-1\}$, existe un homeomorfismo $f_i : [0, 1]^2 \rightarrow F_2(I_i)$ tal que $f_i([0, 1] \times \{0\}) = F_1(I_i)$ y $f_i(\frac{1}{2}, 0) = \{p_i\}$. Sea $\alpha_i : [0, 1] \rightarrow F_1(I_i)$ dada por $\alpha_i(t) = f_i(t, 0)$.
Sea $\varphi : [0, 1]^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow U$ dado por

$$\varphi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \begin{cases} f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \geq 0, \\ \alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2, -t_n) \cup \alpha_3(t_3) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}), & \text{si } t_n \leq 0. \end{cases}$$

Notemos que φ esta bien definida y para cada $z \in [1, 0]^{n-1} \times [-1, 1]$, $\varphi(z) \in \langle I_1, \dots, I_{n-1} \rangle_n \subset U$.

Ahora veamos que φ es inyectiva. Supongamos que $\varphi(t_1, \dots, t_n) = \varphi(s_1, \dots, s_n)$. Es necesario considerar tres casos:

■ $t_n, s_n \geq 0$.

$$f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = f_1(s_1, s_n) \cup \alpha_2(s_2) \cup \dots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1}).$$

Por definición de α_i , tenemos

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_n) \cup f_2(t_2, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = \\ f_1(s_1, s_n) \cup f_2(s_2, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(s_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Ya que I_1, \dots, I_{n-1} son disjuntos,

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_n) = f_1(s_1, s_n), f_2(t_2, 0) = f_2(s_2, 0), \dots, f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = \\ f_{n-1}(s_{n-1}, 0), \end{aligned}$$

dado que cada una de las funciones f_1, \dots, f_{n-1} es inyectiva, $(t_1, \dots, t_n) = (s_1, \dots, s_n)$.

- $t_n, s_n \leq 0$.

$$\begin{aligned} \alpha_1(t_1) \cup f_2(t_2, -t_n) \cup \alpha_3(t_3) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \\ \alpha_1(s_1) \cup f_2(s_2, -s_n) \cup \alpha_3(s_3) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1}). \end{aligned}$$

Por definición de α_i , tenemos

$$\begin{aligned} f_1(t_1, 0) \cup f_2(t_2, -t_n) \cup f_3(t_3, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = \\ f_1(s_1, 0) \cup f_2(s_2, -s_n) \cup f_3(s_3, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(s_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Ya que I_1, \dots, I_{n-1} son subarcs disjuntos, entonces $f_1(t_1, 0) = f_1(s_1, 0)$, $f_2(t_2, -t_n) = f_2(s_2, -s_n)$, \dots , $f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = f_{n-1}(s_{n-1}, 0)$, dado que las funciones f_i son inyectivas, se concluye que $(t_1, \dots, t_n) = (s_1, \dots, s_n)$.

- $s_n \leq 0 \leq t_n$.

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_n) \cup \alpha_2(t_2) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(t_{n-1}) = \\ \alpha_1(s_1) \cup f_2(s_2, -s_n) \cup \alpha_3(s_3) \cup \cdots \cup \alpha_{n-1}(s_{n-1}). \end{aligned}$$

Por definición de α_i , se tiene

$$\begin{aligned} f_1(t_1, t_n) \cup f_2(t_2, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = \\ f_1(s_1, 0) \cup f_2(s_2, -s_n) \cup f_3(s_3, 0) \cup \cdots \cup f_{n-1}(s_{n-1}, 0). \end{aligned}$$

Así,

$$f_1(t_1, t_n) = f_1(s_1, 0), f_2(t_2, 0) = f_2(s_2, -s_n), \dots, f_{n-1}(t_{n-1}, 0) = f_{n-1}(s_{n-1}, 0).$$

Dado que las funciones f_1, \dots, f_{n-1} son inyectivas,

$$(t_1, \dots, t_{n-1}) = (s_1, \dots, s_{n-1}) \text{ y } s_n = 0 = t_n.$$

Por los tres casos anteriores, podemos concluir que φ es inyectiva.

Sea $\mathcal{C} = \text{Im}(\varphi)$, entonces \mathcal{C} es una n -celda en U .

Consideremos el arco $\mathcal{A} = \{p_1, p_2, p_4, \dots, p_{n-1}\} \cup f_3(\frac{1}{2} \times [0, 1])$. Claramente $\mathcal{A} \subset U$. Notemos que $\varphi(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0) = f_1(\frac{1}{2}, 0) \cup f_2(\frac{1}{2}, 0) \cup \dots \cup f_{n-1}(\frac{1}{2}, 0) = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ pertenece a \mathcal{A} .

Por otra parte, si $t > 0$, el conjunto $\{p_1, p_2, p_4, \dots, p_{n-1}\} \cup f_3(\frac{1}{2}, t)$ tiene dos puntos diferentes en el arco I_3 y para cada $z = (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^{n-1} \times [-1, 1]$, $\varphi(z) \cap I_3 = \alpha_3(t_3)$ es el conjunto de un punto. Por lo que $\mathcal{A} \cap \mathcal{C} = \{\varphi(\frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}, 0)\}$. Por tanto, $\mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ es la unión de una n -celda y el arco \mathcal{A} , dicho arco intersecta a \mathcal{C} únicamente en un punto, el cual es punto final de \mathcal{A} y está en el interior variedad de \mathcal{C} (tales espacios son llamados paraguas n -dimensional). El Teorema 1.0.6 implica que el espacio $\mathcal{C} \cup \mathcal{A}$ no es encajable en \mathbb{R}^n . Por lo que concluimos que U no puede encajarse en \mathbb{R}^n . ■

Corolario 4.2.4. Sean X una gráfica finita y $n \geq 4$. Entonces $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) - (R_n(X) \cup F_{n-1}(X))$.

Demostración: Por el Lema 4.2.2 tenemos que $\mathcal{E}_n(X) \supseteq F_n - (R_n(X) \cup F_{n-1}(X))$. Por otro lado, consideremos $A \in \mathcal{E}_n(X)$, entonces A tiene una vecindad en $F_n(X)$ la cual es homeomorfa a una n -celda. Por el Lema 4.1.3 ningún punto de A es vértice de un triodo simple. Entonces A no contiene puntos de ramificación. Además, por el lema anterior $A \notin F_{n-1}(X)$. Por tanto $A \in F_n(X) - (R_n(X) \cup F_{n-1}(X))$. Lo que muestra que $\mathcal{E}_n(X) = F_n(X) - (R_n(X) \cup F_{n-1}(X))$. ■

El siguiente lema utiliza el hecho de que para todo continuo no degenerado X , el espacio $F_n(X)$ es localmente separado por $F_{n-1}(X)$. En efecto, por ejemplo, con $n > 2$ si $A = \{p, q\}$ y $p \neq q$, entonces en las pequeñas vecindades de A se tienen dos tipos de conjuntos $B \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$ tiene el

punto p y el resto cerca de q , y los conjuntos $C \in F_n(X) - F_{n-1}(X)$ tiene al punto q y el resto cerca de p . Sin embargo no hay una colección de conjuntos conexos en $F_n(X) - F_{n-1}(X)$, cada una cerca de A , que contenga a B y C .

Lema 4.2.5. Sean X una gráfica finita y $n \geq 4$. Para todo $A \in F_n(X)$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) $A \in F_1(X) - R_n(X)$;
- (b) $A \notin \mathcal{E}_n(X)$ y A tiene una base \mathcal{B} de vecindades en $F_n(X)$ tal que $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ es arco-conexo para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$.

Demostración: Primero veamos que (b) implica (a). Supongamos que A tiene una base de vecindades \mathcal{B} en $F_n(X)$ tal que para cada \mathcal{U} , $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$ es arco-conexo y $A \notin \mathcal{E}(X)$. Ya que $A \notin \mathcal{E}(X)$, por el Corolario 4.2.4, $A \in R_n(X) \cup F_{n-1}(X)$. Sea $A = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$, donde $1 \leq r \leq n$, y p_1, p_2, \dots, p_r , son todos diferentes. Sea $\delta_1 > 0$ tal que $B_X(\delta_1, p_1), \dots, B_X(\delta_1, p_r)$ son disjuntos por pares, $A \cap R(X) = (B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_r)) \cap A$ y $\delta_1 < \frac{1}{3}$. Elegimos $\mathcal{U} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{U} \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$. Sea $\delta > 0$ tal que $B_{F_n(X)}(\delta, A) \subset \mathcal{U}$.

Vamos a considerar primero el caso en el que $A \in R_n(X)$. En este caso podemos suponer que $p_r \in R(X)$. Sean J y L aristas de X tales que $J \neq L$ y $p_r \in J \cap L$. Seleccionando dos conjuntos con n puntos diferentes $\{x_1, \dots, x_n\}$ y $\{y_1, \dots, y_n\}$ de $X - R(X)$ tales que $d(x_i, p_i) < \delta$, $d(y_i, p_i) < \delta$ para cada $i \in \{1, \dots, r-1\}$,

$$\{x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap J \text{ y } \{y_r, y_{r+1}, \dots, y_n\} \subset B_X(\delta, p_r) \cap L.$$

Entonces, los conjuntos $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ y $C = \{y_1, \dots, y_n\}$ pertenecen a $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$. De la elección de \mathcal{B} , existe una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$ tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$.

Notemos que p_r es un punto de separación de conjunto $B_X(\delta_1, p_r)$ en dos subconjuntos abiertos U y V tales que $\{x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\} \subset U$ y $\{y_r, y_{r+1}, \dots, y_n\} \subset V$. Dado $t \in [0, 1]$, $\alpha(t) \in \mathcal{E}_n(X)$ tal que $\alpha(t)$ no contiene puntos de ramificación y $\alpha(t)$ contiene n puntos diferentes. En particular, $p_r \notin \alpha(t)$. Además como $\alpha(t) \in \mathcal{U}$, entonces, $\alpha(t) \in B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$. Por tanto $\alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U \cup V$.

Sean

$$k_1 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \subset B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U\}$$

y

$$k_2 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Por tanto $[0, 1] = k_1 \cup k_2$.

Dado que V no intersecta a $B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_{r-1}) \cup U$, se tiene que $k_1 \cap k_2 = \emptyset$. Notemos k_1 y k_2 son abiertos no vacíos en $[0, 1]$. Ya que, por definición, $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$, $0 \in k_1$ y $1 \in k_2$. Así, k_1 y k_2 forman una separación de $[0, 1]$. Esta contradicción prueba que $A \notin R_n(X)$.

Por tanto $A \in F_{n-1}(X) - R_n(X)$.

Ahora supongamos que A es no degenerado, es decir, $r > 1$. Eligiendo subconjuntos $\{x_{r+1}, \dots, x_n\} \in B_X(\delta, p_1) - \{p_1\}$ y $\{y_{r+1}, \dots, y_n\} \in B_X(\delta, p_r) - \{p_r\}$, donde los puntos x_{r+1}, \dots, x_n son todos diferentes y lo mismo pasa con y_{r+1}, \dots, y_n . Sean

$$B = \{p_1, \dots, p_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}, \text{ y}$$

$$C = \{p_1, \dots, p_r, y_{r+1}, \dots, y_n\}.$$

Entonces los conjuntos B y C pertenecen a $\mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X)$. Por la elección de \mathcal{B} , existe una función $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{U} \cap \mathcal{E}_n(X) \subset B_{F_n(X)}(\delta_1, A)$, tal que $\alpha(0) = B$ y $\alpha(1) = C$.

Sean

$$k_1 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \text{ contiene exactamente un punto en } B_X(\delta_1, p_1)\}, \text{ y}$$

$$k_2 = \{t \in [0, 1] : \alpha(t) \text{ contiene más de un punto en } B_X(\delta_1, p_1)\}.$$

Notemos que $[0, 1] = k_1 \cup k_2$, $1 \in k_1$, $0 \in k_2$ y $k_1 \cap k_2 = \emptyset$.

Veamos que k_1 y k_2 son abiertos en $[0, 1]$. Sean $t \in k_2$ y $\alpha(t) = \{w_1, \dots, w_n\}$, donde todos los puntos w_1, \dots, w_n son todos diferentes. Sabemos que $\alpha(t)$ contiene al menos dos elementos en $B_X(\delta_1, p_1)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que w_1 y w_2 pertenecen a $B_X(\delta_1, p_1)$. Sea $\delta_0 > 0$ tal que $B_X(\delta_0, w_1), \dots, B_X(\delta_0, w_n)$ son disjuntos dos a dos y $B_X(\delta_0, w_1) \cup B_X(\delta_0, w_2) \subset B_X(\delta_1, p_1)$. Si s es un elemento de $[0, 1]$ que se encuentra cerca de t , por ser α continua, $\alpha(s)$ tiene un elemento en $B_X(\delta_0, w_1)$ y otro más en $B_X(\delta_0, w_2)$, ambos puntos están en $B_X(\delta_1, p_1)$. Así que $s \in k_2$. Se ha probado que k_2 es abierto.

Ahora tomando $t \in k_1$. Supongamos que $\alpha(t) = \{w_1, \dots, w_n\}$, donde todos los puntos w_1, \dots, w_n son todos diferentes. Supongamos que w_1 es el único elemento de $\alpha(t)$ que pertenece a $B_X(\delta_1, p_1)$. Ya que $\alpha(t) \in \mathcal{U}$, $\alpha(t) \subset$

$B_X(\delta_1, p_1) \cup \dots \cup B_X(\delta_1, p_r)$. De aquí, podemos tomar $\delta_0 > 0$ tal que los conjuntos $B_X(\delta_0, w_1), \dots, B_X(\delta_0, w_n)$ son disjuntos dos a dos y cada uno de ellos está contenido en un conjunto de la forma $B_X(\delta_1, p_j)$. Ya que w_1 es el único del conjunto $\{w_1, \dots, w_n\}$ que pertenece a $B_X(\delta_1, p_1)$, se tiene que $(B_X(\delta_1, p_1) \cap (B_X(\delta_0, w_2) \cup \dots \cup B_X(\delta_0, w_n))) = \emptyset$. Sea $s \in [0, 1]$ tal que $H(\alpha(s), \alpha(t)) < \delta_0$. Entonces, $\alpha(s)$ interseca a cada uno de los elementos de la forma $B_X(\delta_0, w_i)$ y está contenido en su unión. Así, $\alpha(s)$ tiene $n - 1$ elementos en $B_X(\delta_0, w_2) \cup \dots \cup B_X(\delta_0, w_n)$ y uno en $B_X(\delta_0, w_1)$. Por lo tanto, $\alpha(s)$ tiene exactamente un elemento en $B_X(\delta_1, p_1)$. Por tanto $s \in k_1$. Esto completa la prueba de que k_1 es abierto.

Se ha encontrado una desconexión de $[0, 1]$, esto es una contradicción, con lo que se prueba que A es degenerado. Por tanto, $A \in F_1(X) - R_n(X)$.

Ahora mostraremos que (a) implica (b). Supongamos que $A \in F_1(X) - R_n(X)$. Así, $A = \{p\}$ para algún $p \in X - R(X)$. Por lo que existe $\delta > 0$ tal que $B_X(\delta, p)$ es conexo en alguna arista J de X y $B_X(\delta, p) \cap R(X) = \emptyset$. Así $B_X(\delta, p)$ es homeomorfo a algún subintervalo L de $[0, 1]$. Identifiquemos a $B_X(\delta, p)$ con L . Sea $\mathcal{B} = \{B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) : 0 < \eta < \delta\}$. Vamos a probar que si $\eta > 0$ y $B, C \in B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$, entonces existe un arco contenido en $B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$ el cual une a B con C . Ya que $B, C \subset N(\delta, p) = L$, podemos asumir que $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ y $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ donde $b_1 < \dots < b_n$ y $c_1 < \dots < c_n$. Así, definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$ por $\alpha(t) = \{tb_1 + (1-t)c_1, \dots, tb_n + (1-t)c_n\}$. Notemos que α es una función continua, $\alpha(0) = C$ y $\alpha(1) = B$. Así, $B_{F_n(X)}(\eta, \{p\}) \cap \mathcal{E}_n(X)$ es arco-conexo. Ya que A es degenerado, $A \notin \mathcal{E}_n(X)$. Esto completa la demostración. ■

Teorema 4.2.6. *Sean X y Y gráficas finitas. Supongamos que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$ y $n \geq 4$. Entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración: Sea $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo. Notemos que $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. Por el Lema 4.2.5 y por ser h un homeomorfismo, $h(F_1(X) - R_n(X)) = F_1(Y) - R_n(Y) \subset F_1(Y)$. Ya que $F_1(X) - R_n(X)$ es denso en $F_1(X)$ y $F_1(Y)$ es compacto, se tiene que $h(F_1(X)) \subset F_1(Y)$. Similarmente, $h^{-1}(F_1(Y)) \subset F_1(X)$. Así, $h(F_1(X)) = F_1(Y)$. Como $F_1(X)$ es homeomorfo a $F_1(Y)$. Se tiene que X es homeomorfo a Y . ■

4.3. El caso $n \leq 3$

Lema 4.3.1. Sean X una gráfica finita, $n \in \{2, 3\}$. Si $A \in F_n(X) - R_n(X)$, entonces $A \in \mathcal{E}_n(X)$.

Demostración: Se comenzará analizando el caso $n = 3$. Primero supongamos que $A = \{x\}$ para algún $x \in X$. Ya que x no es punto de ramificación de X , existe una vecindad J de x , tal que J es un arco. Así, $A \in \langle J \rangle_3$. Además $\langle J \rangle_3 = F_3(J)$ es vecindad de A en $F_3(X)$ la cual, es homeomorfa a $[0, 1]^3$, por el Teorema 1.1.21. Por tanto $A \in \mathcal{E}_3(X)$.

Ahora supongamos que $A = \{x, y\}$, donde $x \neq y$. Sean J_1 y J_2 arcos disjuntos en $X - R(X)$ tales que J_1 y J_2 son vecindades de x y y respectivamente. Así, $\langle J_1, J_2 \rangle_3$ es una vecindad de A en $F_3(X)$. Para cada $i \in \{1, 2\}$, existe un homeomorfismo $f_i : [0, 1]^2 \rightarrow F_2(J_i)$ tal que $f_i([0, 1] \times \{0\}) = F_1(J_i)$. Sea $\varphi : [0, 1]^2 \times [-1, 1] \rightarrow \langle J_1, J_2 \rangle_3$ dado por

$$\varphi(t_1, t_2, t_3) = \begin{cases} f_1(t_1, t_3) \cup f_2(t_2, 0) & \text{si } t_3 \geq 0, \\ f_1(t_1, 0) \cup f_2(t_2, -t_3) & \text{si } t_3 \leq 0. \end{cases}$$

Ya que f_1 y f_2 son continuas, entonces $f_1(t_1, t_3) \cup f_2(t_2, 0)$ es continua, lo mismo sucede con $f_1(t_1, 0) \cup f_2(t_2, -t_3)$. Como $t_3 = 0$ estas funciones son iguales, por Teorema del Pegamiento, tenemos que φ es continua. Se sigue de la biyectividad de f_1 y f_2 que φ es biyectiva. Por lo tanto, φ es un homeomorfismo. Concluimos que $\langle J_1, J_2 \rangle_3$ es homeomorfo a una 3-celda.

Para el caso en que $A = \{x, y, z\}$, donde x, y, z son diferentes. Dado que $A \in F_3(X) - R_3(X)$, entonces $A \in F_3(X) - (F_2(X) \cup R_3(X))$. Así, por el Lema 4.2.2, $A \in \mathcal{E}_3(X)$.

Ahora, consideremos el caso $n = 2$. Supongamos que $A = \{x\}$ para algún $x \in X$. Ya que x no es punto de ramificación de X , existe una vecindad J de x , tal que J es un arco. Así, $A \in \langle J \rangle_2$ y $\langle J \rangle_2 = F_2(J)$ es vecindad de A en $F_2(X)$ la cual, por el Teorema 1.1.21, es homeomorfa a $[0, 1]^2$. Por tanto $A \in \mathcal{E}_2(X)$.

Por último, consideremos a $A = \{x, y\}$, donde $x \neq y$. Ya que $A \in F_2(X) - R_2(X)$, $A \in F_2(X) - (F_1(X) \cup R_2(X))$. Por tanto, por el Lema 4.2.2, $A \in \mathcal{E}_2(X)$. ■

Sean Z un continuo y W un subconjunto abierto de Z . Para cada subconjunto U de Z , sea $c(U) = \text{número de componentes de } U \cap W$, si este número es finito y en el caso contrario $c(U) = \infty$. Para cada $p \in \text{Cl}_Z(W)$, definamos

$v(p) = \min(\{m \in \mathbb{N} : p \text{ tiene una base de vecindades } \mathcal{B} \text{ en } Z \text{ tal que } c(U) = m \text{ para cada } U \in \mathcal{B}\} \cup \{\infty\})$.

Lema 4.3.2. Sean Z un continuo, $p \in Z$, W un subconjunto abierto de Z y $m \in \mathbb{N}$. Supóngase que p tiene una base de vecindades \mathcal{B} en Z tal que, para cada $U \in \mathcal{B}$, $c(U) = m$ y para cada componente C de $U \cap W$, $p \in \text{Cl}_Z(C)$. Entonces $v(p) = m$.

Demostración: Por la definición de $v(p)$, $v(p) \geq m$ y p tiene una base de vecindades \mathcal{B}_1 en Z tal que $c(U) = v(p)$ para cada $U \in \mathcal{B}_1$. Sean $V \in \mathcal{B}$ y $U \in \mathcal{B}_1$ tales que $U \subset V$. Por hipótesis, $U \cap W$ tiene m componentes, C_1, \dots, C_m y $p \in \text{Cl}_Z(C_i)$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Así, $U \cap C_i \neq \emptyset$ para cada $i \in \{1, \dots, m\}$. Por tanto, $U \cap W = U \cap V \cap W = (U \cap C_1) \cup \dots \cup (U \cap C_m)$. Ya que los conjuntos en esta unión son disjuntos y son no vacíos, $U \cap W$ tiene al menos m componentes. Así, $v(p) = c(U) \leq m$. Por tanto $v(p) = m$. ■

Definición 4.3.3. Una gráfica finita que es diferente de una curva cerrada simple es llamada gráfica **acircular**.

Para una gráfica acircular X . Sea v_X el conjunto definido como antes, donde $\mathcal{E}_3(X)$ será el subconjunto abierto de $F_3(X)$. Simplemente escribiremos v si no es necesario mencionar el espacio X .

Lema 4.3.4. Sean X una gráfica finita, p, q, r, w, x, y puntos de X tales que $\text{ord}(p, X) = n \geq 3$, $\text{ord}(q, X) = m \geq 3$, $\text{ord}(r, X) = k \geq 3$ y x, y, w no son puntos de ramificación de X . Dada $A \in F_3(X)$, entonces los posibles valores para $v(A)$ son:

- (a) si $A = \{p\}$, entonces $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$;
- (b) si $A = \{p, x\}$, entonces $v(A) = n + \binom{n}{2}$;
- (c) si $A = \{p, x, y\}$ y $x \neq y$, entonces $v(A) = n$;
- (d) si $A = \{p, q\}$ y $p \neq q$, entonces $v(A) = n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2} + n \cdot m$;
- (e) si $A = \{p, q, w\}$ y $p \neq q$, entonces $v(A) = n \cdot m$;
- (f) si $A = \{p, q, r\}$ y p, q, r son todos diferentes, entonces $v(A) = n \cdot m \cdot k$;
- (g) si $A \in F_3(X) - R_3(X)$, entonces $v(A) = 1$.

Demostración: Usaremos el Lema 4.3.2. Sea $\delta_0 > 0$ tal que

$$N_X(\delta_0, A) \cap R(X) = A \cap R(X)$$

y $N_X(\delta_0, A)$ tiene tantas componentes como número de puntos de A y $\delta_0 < \frac{1}{3}$.
Sea

$$\mathcal{B} = \{B_{F_3(X)}(\delta, A) \subset F_3(X) : 0 < \delta < \delta_0\}.$$

Entonces, \mathcal{B} es una base de vecindades de A en $F_3(X)$.

Solamente se probaremos los incisos (a) y (d), ya que la demostración es similar para todos los casos.

(a) Supongamos que $A = \{p\}$. Sea $\delta \in (0, \delta_0)$. Entonces, $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A))$ es un n -odo simple, $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A)) = J_1 \cup \dots \cup J_n$, donde $J_i \cap J_j = \{p\}$ si $i \neq j$ y cada J_i es un arco con puntos finales p y un punto a_i .

Afirmación 1: Un elemento $B \in F_3(X)$ pertenece a $B_{F_3(X)}(\delta, A)$ si y sólo si

$$B \subset N_X(\delta, A) = \text{Cl}_X(N_X(\delta, A)) - \{a_1, \dots, a_n\}.$$

En efecto, si $B \in F_3(X)$ y $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$ entonces $H(A, B) < \delta$, por la definición de H , se tiene que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Ahora, si $B \subset N(\delta, A)$, entonces para todo $y \in B$, $d(y, p) < \delta$, por lo que $A \subset N(\delta, B)$. Así, $H(A, B) < \delta$. Por tanto $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$.

Afirmación 2: $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$ si y sólo si

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_1 - \{p\}) \cup \dots \cup (J_n - \{p\}).$$

En efecto, si $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$, por la afirmación anterior $B \subset N_X(\delta, A)$ y como $B \in \mathcal{E}_3(X)$, por el Lema 4.1.3, B no tiene puntos de ramificación, por lo tanto

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_1 - \{p\}) \cup \dots \cup (J_n - \{p\}).$$

Por otro lado, si

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_1 - \{p\}) \cup \dots \cup (J_n - \{p\}),$$

entonces para todo $y \in B$, $d(y, p) < \delta$, $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$. Además, ningún punto de B es punto de ramificación de X , así que $B \in F_3(X) - R_3(X)$, por el Lema 4.3.1, $B \in \mathcal{E}_3(X)$. Por lo tanto $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$.

Siguiendo la demostración del Lema 4.2.1 se tiene que las componentes de $B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$ son conjuntos de la forma $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$, donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ son diferentes.

Sabemos que J_1, \dots, J_n son arcos diferentes de X . Entonces $J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\}$, son abiertos conexos, donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n\}$ y son disjuntos

dos a dos. Primero veremos que $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$ es conexo. Consideremos la función $f : X^n \rightarrow F_n(X)$ dada por $f((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Afirmación 3: Si $\langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3 \neq \emptyset$, entonces $r \leq 3$.

En efecto, si $D \in \langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_r} - \{p\} \rangle_3$, $D \in F_3(X)$ y $D \cap J_{i_j} \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$ y como los J_{i_j} son disjuntos dos a dos, se tiene que $r \leq 3$.

Afirmación 4: Si $\langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3 \neq \emptyset$, entonces

$$\langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3 = f((J_{i_1} - \{p\}) \times (J_{i_2} - \{p\}) \times (J_{i_3} - \{p\}))$$

para cada $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$.

Eligiendo elementos $p_1 \in J_{i_1} - \{p\}, p_2 \in J_{i_2} - \{p\}, p_3 \in J_{i_3} - \{p\}$. Entonces $\{p_1, \dots, p_3\}$ está en la imagen de cada conjunto de la forma $f(J_{i_1} - \{p\} \times J_{i_2} - \{p\} \times J_{i_3} - \{p\})$ donde $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$. Ya que $f(J_{i_1} - \{p\} \times J_{i_2} - \{p\} \times J_{i_3} - \{p\})$ es conexo, concluimos que $\langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3$ es conexo y abierto, pues $f(J_1 - \{p\} \times J_2 - \{p\} \times J_3 - \{p\}) = \langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3$. Dado que si $\{I_{i_1}, \dots, I_{i_r}\} \neq \{J_1, \dots, J_{i_s}\}$ entonces

$$\langle I_{i_1} - \{p\}, \dots, I_{i_r} - \{p\} \rangle_3 \cap \langle J_{i_1} - \{p\}, \dots, J_{i_s} - \{p\} \rangle_3 = \emptyset.$$

Finalmente, como $N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_{i_1} - \{p\}) \cup (J_{i_2} - \{p\}) \cup (J_{i_3} - \{p\})$ por la afirmación se tiene que el conjunto de la forma $\langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3$ es igual a $B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$, donde i_1, i_2, i_3 son números diferentes y $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n\}$. Así, $c(B_{F_3(X)}(\delta, A)) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.

Dado U , un abierto de $F_3(X)$, tal que $A \in U$, por la construcción de la base, existe un $\delta_1 > 0$ tal que $U \subset B_{F_3(X)}(\delta_1, A)$. Notemos que $A \in \text{Cl}_X(\langle J_{i_1} - \{p\}, J_{i_2} - \{p\}, J_{i_3} - \{p\} \rangle_3)$. Aplicando el Lema 4.3.2, concluimos que $v(A) = n + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$.

(d) Supongamos que $A = \{p, q\}$ con $p \neq q$ y sea $\delta \in (0, \delta_0)$. Entonces, $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A))$ es la unión de un n -odo simple y un m -odo simple, como $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A)) = J_1 \cup \dots \cup J_n \cup J_{n+1} \cup \dots \cup J_{n+m}$, donde $J_i \cap J_j = \{p\}$ si $i \neq j$ con $i, j \in \{1, \dots, n\}$ y cada J_i es un arco con puntos finales p y un punto a_i ; $J_h \cap J_l = \{q\}$ si $h \neq l$ con $h, l \in \{n+1, \dots, n+m\}$ y cada J_i es un arco con puntos finales q y un punto b_i .

Afirmación 5: Un elemento $B \in F_3(X)$ pertenece a $B_{F_3(X)}(\delta, A)$ si y sólo si

$$B \subset N_X(\delta, A) = \text{Cl}_X(N_X(\delta, A)) - \{a_1, \dots, a_n, b_{n+1}, \dots, b_{n+m}\}.$$

En efecto, si $B \in F_3(X)$ y $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$ entonces $H(A, B) < \delta$, por la definición de H , se tiene que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Ahora si $B \subset N(\delta, A)$, entonces para todo $y \in B$, $d(y, p) < \delta$ o $d(y, q) < \delta$, por lo que $A \subset N(\delta, B)$, así que $H(A, B) < \delta$. Por tanto $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$.

Afirmación 6: $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$ si y sólo si

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p, q\} = (J_1 - \{p, q\}) \cup \cdots \cup (J_n - \{p, q\}).$$

En efecto, si $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$, por la Afirmación 5, $B \subset N_X(\delta, A)$ y como $B \in \mathcal{E}_3(X)$, por el Lema 4.1.3, B no tiene puntos de ramificación, por lo tanto

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p, q\} = (J_1 - \{p\}) \cup \cdots \cup (J_n - \{p\}).$$

Por otro lado, si

$$B \subset N_X(\delta, A) - \{p\} = (J_1 - \{p, q\}) \cup \cdots \cup (J_n - \{p, q\}),$$

entonces para todo $y \in B$, $d(y, p) < \delta$ o $d(y, q) < \delta$, $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A)$. Además, ningún punto de B es punto de ramificación de X , así que $B \in F_3(X) - R_3(X)$, por el Lema 4.3.1, $B \in \mathcal{E}_3(X)$. Por lo tanto, $B \in B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$. Continuando como en el Lema 4.2.1, mostramos que las componentes de $B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$ son conjuntos de la forma $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3$, donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n+m\}$ son diferentes.

Sabemos que J_1, \dots, J_{n+m} son arcos diferentes de X . Entonces $J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\}$, son abiertos conexos, donde $i_1, \dots, i_r \in \{1, \dots, n+m\}$ y son disjuntos dos a dos. Primero veremos que $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3$ es conexo. Consideremos la función $f : X^n \rightarrow F_n(X)$ dada por $f((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Afirmación 7: Si $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3 \neq \emptyset$, entonces $r \leq 3$.

En efecto, si $D \in \langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3$, $D \in F_3(X)$ y $D \cap J_{i_j} - \{p, q\} \neq \emptyset$ para cada $j \in \{1, \dots, r\}$ y como los J_{i_j} son disjuntos dos a dos se tiene que $r \leq 3$.

Afirmación 8: Si $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, J_{i_2} - \{p, q\}, J_{i_3} - \{p, q\} \rangle_3 \neq \emptyset$, entonces

$$\begin{aligned} & \langle J_{i_1} - \{p, q\}, J_{i_2} - \{p, q\}, J_{i_3} - \{p, q\} \rangle_3 \\ &= f((J_{i_1} - \{p, q\}) \times (J_{i_2} - \{p, q\}) \times (J_{i_3} - \{p, q\})) \text{ para cada} \\ & \quad i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}. \end{aligned}$$

Eligiendo elementos $p_1 \in J_{i_1} - \{p, q\}, p_2 \in J_{i_2} - \{p, q\}, p_3 \in J_{i_3} - \{p, q\}$. Entonces, $\{p_1, p_2, p_3\}$ está en la imagen de cada conjunto de la forma $f(J_{i_1} - \{p, q\} \times J_{i_2} - \{p, q\} \times J_{i_3} - \{p, q\})$ donde $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$. Ya que $f(J_{i_1} - \{p, q\} \times J_{i_2} - \{p, q\} \times J_{i_3} - \{p, q\})$ es conexo, concluimos que $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, J_{i_2} - \{p, q\}, J_{i_3} - \{p, q\} \rangle_3$ es conexo y abierto. Sabemos que si $\{I_{i_1}, \dots, I_{i_r}\} \neq \{J_1, \dots, J_{i_s}\}$ entonces $\langle I_{i_1} - \{p\}, \dots, I_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3 \cap \langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_s} - \{p, q\} \rangle_3 = \emptyset$. Finalmente, como $N_X(\delta, A) - \{p, q\} = (J_{i_1} - \{p, q\}) \cup \dots \cup (J_{i_{n+m}} - \{p, q\})$ por la afirmación se tiene que los conjuntos de la forma $\langle J_{i_1} - \{p, q\}, J_{i_2} - \{p, q\}, J_{i_3} - \{p, q\} \rangle_3$ es igual a $B_{F_3(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_3(X)$, donde i_1, i_2, i_3 son números diferentes y $i_1, i_2, i_3 \in \{1, \dots, n, n+1, \dots, n+m\}$. Así, $c(B_{F_3(X)}(\delta, A)) = n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2} + n \cdot m$. Dado que $A \in \text{Cl}_X(\langle J_{i_1} - \{p, q\}, \dots, J_{i_r} - \{p, q\} \rangle_3)$. Aplicando el Lema 4.3.2, concluimos que $v(A) = n \cdot \binom{m}{2} + m \cdot \binom{n}{2} + n \cdot m$. ■

La demostración del siguiente lema es similar a la prueba del Lema 4.3.4, por lo que sólo probaremos el inciso (d).

Lema 4.3.5. *Sean X una gráfica finita, p, q, x puntos de X tales que $\text{ord}(p, X) = n \geq 3, \text{ord}(q, X) = m \geq 3$ y x no es punto de ramificación de X . Dado $A \in F_2(X)$, entonces los posibles valores para $v(A)$ ($v(A)$ es definido como antes del Lema 4.3.2 para el conjunto abierto $\mathcal{E}_2(X)$) son:*

- (a) si $A = \{p\}$, entonces $v(A) = n + \binom{n}{2}$;
- (b) si $A = \{p, x\}$, entonces $v(A) = n$;
- (c) si $A = \{p, q\}$ y $p \neq q$, entonces $v(A) = n \cdot m$;
- (d) si $A \in F_2(X) - R_2(X)$, entonces $v(A) = 1$.

Demostración: Usaremos el Lema 4.3.2. Sea $\delta_0 > 0$ tal que $N_X(\delta_0, A) \cap R(X) = A \cap R(X)$ y $N_X(\delta_0, A)$ tiene tantas componentes como número de puntos de A y $\delta_0 < \frac{1}{3}$. Sea $\mathcal{B} = \{B_{F_3(X)}(\delta, A) \subset F_2(X) : 0 < \delta < \delta_0\}$. Entonces \mathcal{B} es una base de vecindades de A en $F_2(X)$.

(d) Supongamos que $A \in F_2(X) - R_2(X)$, tal que $A = \{x, y\}$ con x diferente de y , el caso donde $x = y$ es similar. Sea $\delta \in (0, \delta_0)$, entonces $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A))$ son dos arcos, así $\text{Cl}_X(N_X(\delta, A)) = J_1 \cup J_2$, donde $x \in J_1$ y $y \in J_2$.

Afirmación 1: Un elemento $B \in F_2(X)$ pertenece a $B_{F_2(X)}(\delta, A)$ si y sólo si $B \subset N_X(\delta, A) = \text{Cl}_X(N_X(\delta, A))$.

En efecto, si $B \in F_2(X)$ y $B \in B_{F_2(X)}(\delta, A)$, entonces $H(A, B) < \delta$. Por la definición de H , se tiene que $A \subset N(\delta, B)$ y $B \subset N(\delta, A)$. Ahora si $B \subset N(\delta, A)$, entonces para todo $p \in B$ existe $x \in A$, tal que $d(p, x) < \delta$, por lo que $A \subset N(\delta, B)$. Así, $H(A, B) < \delta$. Por tanto $B \in B_{F_2(X)}(\delta, A)$.

Afirmación 2: $B \in B_{F_2(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_2(X)$ si y sólo si $B \subset N_X(\delta, A)$.

En efecto, si $B \in B_{F_2(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_2(X)$, entonces, por definición $B \subset N_X(\delta, A)$. Por otro lado, si $B \subset N_X(\delta, A)$ por Afirmación 1, $B \in B_{F_2(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_2(X)$, pues J_1 y J_2 son arco que no contiene puntos de ramificación.

Siguiendo el procedimiento de la demostración del Lema 4.2.1 tendremos que las componentes de $B_{F_2(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_2(X)$ son los conjuntos de la forma $\langle J_1, J_2 \rangle_2$.

Sabemos que J_1 y J_2 son arcos diferentes de X . Entonces, son abiertos conexos y disjuntos. Primero veremos que $\langle J_1, J_2 \rangle_2$ es conexo. Consideremos la función $f : X^n \rightarrow F_n(X)$ dada por $f((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

Afirmación 3: Si $\langle J_1, J_2 \rangle_2 \neq \emptyset$, entonces

$$\langle J_1, J_2 \rangle_2 = f(J_1 \times J_2) \text{ para } J_1 \text{ y } J_2 \text{ arcos diferentes de } X.$$

En efecto, dados dos elementos $p_1 \in J_1$ y $p_2 \in J_2$. Entonces, $\{p_1, p_2\}$ está en la imagen del conjunto J_1, J_2 bajo f . Como $f(J_1, J_2)$ es conexo, concluimos que $\langle J_1, J_2 \rangle_2$ es conexo y abierto.

Sabemos que si $\{I_1, I_2\} \neq \{J_1, J_2\}$ entonces $\langle I_1, I_2 \rangle_2 \cap \langle J_1, J_2 \rangle_2 = \emptyset$. Finalmente, como $N_X(\delta, A) = J_1 \cup J_2$ por la afirmación se tiene que el conjunto de la forma $\langle J_1, J_2 \rangle_2$ es igual a $B_{F_2(X)}(\delta, A) \cap \mathcal{E}_2(X)$.

Así, $c(B_{F_2(X)}(\delta, A)) = 1$. Dado que $A \in \text{Cl}_X(\langle J_1, J_2 \rangle_2)$. Aplicando el Lema 4.3.2, concluimos que $v(A) = 1$. ■

Lema 4.3.6. Sean X y Y gráficas finitas y $n \in \{2, 3\}$. Supongamos que existe un homeomorfismo $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$. Si p es un punto de ramificación de X , entonces $h(\{p\}) = \{u\}$ para algún punto de ramificación u de Y .

Demostración: Solamente probaremos el lema para $n = 3$, la prueba para $n = 2$ es similar.

Afirmación 1: $h(R_3(X)) = R_3(Y)$.

Sea $B \in h(R_3(X))$, entonces existe $A \in R_3(X)$, tal que $h(A) = B$. Dado que $A \in R_3(X)$, A contiene al menos un punto de ramificación de X . Por el Lema

4.1.3, $A \notin \mathcal{E}_3(X)$. Así, ninguna vecindad de A en $F_3(X)$ es homeomorfa a una 3-celda. Por ser h un homeomorfismo, tenemos que ninguna vecindad de $h(A)$ en $F_3(Y)$ es homeomorfa a una 3-celda. Por lo tanto $h(A) \notin \mathcal{E}_3(Y)$. Del Lema 4.3.1, $h(A) \notin F_3(Y) - R_3(Y)$. Por tanto $h(A) \in R_3(Y)$. La otra contención se muestra de manera similar, considerando h^{-1} que es un homeomorfismo.

Afirmación 2: $h(\mathcal{E}_3(X)) = \mathcal{E}_3(Y)$.

Sea $B \in h(\mathcal{E}_3(X))$, entonces existe $A \in \mathcal{E}_3(X)$ tal que $h(A) = B$. Dado que $A \in \mathcal{E}_3(X)$, A tiene una vecindad en $F_3(X)$ la cual es una 3-celda. Por ser h un homeomorfismo, tenemos que $h(A)$ tiene en $F_3(Y)$ una vecindad la cual es homeomorfa a una 3-celda. Por tanto $h(A) \in \mathcal{E}_3(Y)$. La otra contención se muestra de manera similar, considerando h^{-1} que es un homeomorfismo. En particular, $h(\{p\}) \in R_3(Y)$. Notemos que para cada $A \in F_3(X)$, $v_X(A) = v_Y(h(A))$. Dada $A \in F_3(X)$, si A contiene un punto $x \in X - R(X)$, entonces existe un arco J en X tal que $x \in J$ y $J \cap R(X) = \emptyset$. Por el Lema 4.3.4, $v_X(A) = v_X((A - \{x\}) \cup \{u\})$, para cada $u \in J$. Esto muestra que para cada vecindad U de A en $F_3(X)$, $v_X(A)$ coincide con $v_X(A_1)$ para una infinidad de elementos A_1 de U .

Dada $A \in F_3(X)$, si $A \subset R(X)$, entonces A es de la forma descrita en (a), (d) o (f) del Lema 4.3.4. Si A es de la forma descrita en (a), entonces los elementos A_1 de $F_3(X)$, los cuales son cercanos a A y son diferentes de A es de una de las formas descritas en (b), (c) o (g) y para cada uno de ellos, $v_X(A_1) < v_X(A)$. De aquí que $v_X(A)$ alcanza un máximo valor absoluto en A .

Por tanto, dado $A \in F_3(X)$, entonces $A \subset R(X)$ si y sólo si $v_X(A)$ alcanza un máximo absoluto en A .

Como consecuencia, dado $A \in F_3(X)$, entonces $A \subset R(X)$ si y sólo si $h(A) \subset R(Y)$.

Por tanto, $h(\{p\})$ es de una de las siguientes formas: $\{u\}$, $\{u, z\}$, $\{u, z, w\}$, donde $u, z, w \in R(Y)$ y son todos diferentes.

Primero se analizará el caso en el que $h(\{p\}) = \{u, z\}$ con $u \neq z$, donde $ord(p, X) = k$, $ord(u, Y) = r$, $ord(z, Y) = s$. Ya que $v_X(\{p\}) = v_X(\{u, z\})$, tenemos que:

$$k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = r \cdot \binom{s}{2} + s \cdot \binom{r}{2} + r \cdot s$$

De acuerdo con el Lema 4.3.4, los posibles valores para v_X en los diferentes elementos de la forma $\{p\}$ y una vecindad pequeña de $\{p\}$ en $F_3(X)$ son $k + \binom{k}{2}$, k y 1. Por otra parte, los posibles valores para v_Y en los diferentes elementos de la forma $\{u, z\}$ y en pequeñas vecindades de $\{u, z\}$ en $F_3(Y)$

son $r + \binom{r}{2}, s + \binom{s}{2}, r \cdot s, r, s$ y 1. Dado que estos conjuntos de valores deben coincidir, obtenemos que $r + \binom{r}{2}$ y r pertenecen a $\{k + \binom{k}{2}, k\}$. Así, $r = k$. Entonces, $r \cdot s = k^2$ debe ser igual, ya sea a $k + \binom{k}{2}$ o k . Claramente $k \neq k^2$ y si $k^2 = k + \frac{k(k-1)}{2}$, entonces $k = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo que se ha probado que es imposible $h(\{p\}) = \{u, z\}$.

Ahora, analizaremos el caso en el que $h(\{p\}) = \{u, z, w\}$, donde u, z, w son todos diferentes, $ord(p, X) = k, ord(u, Y) = r, ord(z, Y) = s$ y $ord(w, Y) = t$. Ya que $v_X(\{p\}) = v_Y(\{u, z, w\})$ tenemos

$$k + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} = r \cdot s \cdot t$$

De acuerdo con el Lema 4.3.4, los posibles valores para v_X en los diferentes elementos de la forma $\{p\}$ y en pequeñas vecindades de $\{p\}$ en $F_3(X)$ son $k + \binom{k}{2}, k$ y 1. Por otra parte, los posibles valores para v_Y en los diferentes elementos de la forma $\{u, z, y\}$ y en pequeñas vecindades $\{u, z, y\}$ en $F_3(X)$ son $r, s, t, r \cdot s, r \cdot t, s \cdot t$ y 1. Ya que estos conjuntos de valores deben coincidir, obtenemos que r y $r \cdot s$ deben pertenecer al conjunto $\{k + \binom{k}{2}, k\}$. Así, $r = k$. De manera similar, $s = k = t$. Por tanto $k^2 = k + \frac{k(k-1)}{2}$. Así $k = 1$, lo cual es una contradicción. Hemos probado que este caso es imposible.

Por tanto, la única posibilidad es que $h(\{p\})$ sea de la forma $h(\{p\}) = \{u\}$, para algún $u \in R(Y)$. ■

Teorema 4.3.7. Sean X y Y gráficas acirculares diferentes de un arco y $n \in \{2, 3\}$. Suponga que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es homeomorfo a Y .

Demostración: Sólo se probará el caso para $n = 3$, ya que la prueba para $n = 2$ es similar. Sea $h : F_3(X) \rightarrow F_3(Y)$. De acuerdo con el Lema 4.3.6 para cada punto $p \in R(X)$ existe un punto $k(p) \in R(Y)$ tal que $h(\{p\}) = \{k(p)\}$. Así, $h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$. Aplicando nuevamente el Lema 4.3.6, para h^{-1} , se tiene que para cada $q \in R(Y)$, existe un punto $k'(q) \in R(X)$ tal que $h^{-1}(\{q\}) = \{k'(q)\}$. Dado $p \in R(X)$, $\{k'(k(p))\} = h^{-1}(\{k(p)\}) = \{p\}$. Así que $k'(k(p)) = p$. Similarmente, $k(k'(q)) = q$, para cada $q \in R(Y)$. Por tanto k es una biyección entre $R(X)$ y $R(Y)$.

Como es usual, k' es denotado por k^{-1} . Vamos a probar el teorema mostrando una serie de afirmaciones.

Afirmación 1: Sean $p, x \in R(X)$. Entonces, p y x son vértices adyacentes en X si y sólo si $k(p)$ y $k(x)$ son vértices adyacentes en Y .

Como p y x son adyacentes, existe una arista L de X tal que p y x son puntos finales de L . Sea $U = \langle \text{Int}_X(L) \rangle_3$. Por el Lema 4.2.1, U es abierto y es una componente de $F_3(X) - R_3(X)$. Por el Lema el 4.1.3 y el Lema 4.3.1, $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$. Así, $h(U)$ es una componente de $F_3(Y) - R_3(Y)$. Por el Lema 4.2.1, $h(U) = \langle \text{Int}_Y(J_1), \dots, \text{Int}_Y(J_r) \rangle_3$ para algunas aristas J_1, \dots, J_r de Y y algún $r \in \{1, 2, 3\}$. Ya que $\{p\}, \{x\} \in \text{Cl}_{F_3(X)}(U)$, $\{k(p)\}, \{k(x)\} \in \text{Cl}_{F_3(Y)}(\langle \text{Int}_Y(J_1), \dots, \text{Int}_Y(J_r) \rangle_3)$. Por tanto, existe una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ en $\langle \text{Int}_Y(J_1), \dots, \text{Int}_Y(J_r) \rangle_3$ tal que $\lim B_n = \{k(p)\}$. Ya que cada B_n intersecta a J_1 y como J_1 es cerrada, J_1 intersecta a $\{k(p)\}$. Así, $k(p) \in J_1$. Similarmente $k(x) \in J_1$. Por tanto $k(p)$ y $k(x)$ son adyacentes.

Afirmación 2: Sean $p, x \in R(X)$ vértices adyacente de X . Entonces, el número de aristas de X que unen a p con x , coincide con el número de aristas de Y que unen a $k(p)$ con $k(x)$.

Para demostrar la Afirmación 2, sean I_1, \dots, I_s aristas diferentes que unen a p con x . Sea $\mathcal{C} = \langle \text{Int}_X(L_1), \dots, \text{Int}_X(L_r) \rangle_3$ una componente de $F_3(X) - R_3(X)$ tal que $\{p\}, \{x\} \in \text{Cl}_{F_3(X)}(\mathcal{C})$. Procediendo como en la prueba de la Afirmación 1, $\{p, x\} \subset L_1 \cap \dots \cap L_r$. Por lo tanto, $\{L_1, \dots, L_r\}$ es un subconjunto no vacío de $\{I_1, \dots, I_s\}$ con a lo más 3 elementos.

Por otra parte, si $\{L_1, \dots, L_r\}$ es un subconjunto no vacío de $\{I_1, \dots, I_s\}$ con a lo más 3 elementos, entonces $\{p\}, \{x\} \in \text{Cl}_{F_3(X)}(\langle \text{Int}_X(L_1), \dots, \text{Int}_X(L_r) \rangle_3)$. Por tanto, el número de componentes de \mathcal{C} de $F_3(X) - R_3(X)$ tal que $\{p\}, \{x\} \in \text{Cl}_{F_3(X)}(\mathcal{C})$ es igual a $s + \binom{s}{2} + \binom{s}{3}$.

Ya que h es un homeomorfismo, este número debe coincidir con el número de componentes de $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$ que contiene a $h(\{p\}) = \{k(p)\}$ y a $h(\{x\}) = \{k(x)\}$ en su cerradura. El cual es igual a $m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$, donde m es el número de aristas de Y que unen a $k(p)$ con $k(x)$. Así, $s + \binom{s}{2} + \binom{s}{3} = m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$. Por tanto $s = m$. Esto completa la prueba de la Afirmación 2.

Afirmación 3: Si $p \in R(X)$ y $\text{ord}(p, X) = r$, entonces $\text{ord}(k(p), Y) = r$.

Por el Lema 4.1.3 y el Lema 4.3.1, $h(R_3(X)) = R_3(Y)$ y $h(\mathcal{E}_3(X)) = \mathcal{E}_3(Y)$. Así, para cada $A \in F_3(X)$, $v_X(A) = v_Y(h(A))$.

En particular, $v_X(\{p\}) = v_Y(\{k(p)\})$. Si $m = \text{ord}(k(p), Y)$, por el Lema 4.3.4, entonces $r + \binom{r}{2} + \binom{r}{3} = v_X(\{p\}) = v_Y(\{k(p)\}) = m + \binom{m}{2} + \binom{m}{3}$. Así, $r = m$. Por tanto, la Afirmación 3 está probada.

Afirmación 4: Sea $p \in R(X)$ tal que $\text{ord}(p, X) = r$.

Supongamos que el número de lazos de X (respectivamente de Y) que con-

tiene a p (respectivamente, $k(p)$) es m (respectivamente, m') el número de puntos finales de X (respectivamente, Y) adyacentes a p (respectivamente, $k(p)$) es t (respectivamente, t') y el número de aristas de X (respectivamente, Y) uniendo p (respectivamente, $k(p)$) a otro punto de ramificación de X (respectivamente, Y) es s (respectivamente, s'). Entonces $m = m'$, $t = t'$ y $s = s'$.

Por la Afirmación 3, $\text{ord}(k(p), Y) = r$. Así, $2m + t + s = r = 2m' + t' + s'$. Sean I_1, \dots, I_u diferentes aristas de X que contienen a p . Entonces $u = m + t + s$. Procediendo como en la demostración de la Afirmación 2, el número de componentes \mathcal{C} de $F_3(X) - R_3(X)$ que satisface que $\{p\} \in \text{Cl}_{F_3(X)}(\mathcal{C})$ es igual al número de subconjuntos no vacíos de I_1, \dots, I_u con a lo más tres elementos. Por lo tanto, el número de componentes es igual a $u + \binom{u}{2} + \binom{u}{3}$.

Ya que h es un homeomorfismo, este número es igual al número de componentes de $h(F_3(X) - R_3(X)) = F_3(Y) - R_3(Y)$ que contiene en su cerradura a $h(\{p\}) = \{k(p)\}$, que es igual a $u' + \binom{u'}{2} + \binom{u'}{3}$, donde u' es el número de aristas de Y que contienen a $k(p)$. Así, $u + \binom{u}{2} + \binom{u}{3} = u' + \binom{u'}{2} + \binom{u'}{3}$. Por tanto, $u = u'$. Ya que $u' = m' + t' + s'$, entonces $m + t + s = m' + t' + s'$. Como $2m + t + s = 2m' + t' + s'$, obtenemos que $m = m'$ y $t + s = t' + s'$. De la Afirmación 1 y la Afirmación 2, se sigue que $s = s'$. Por tanto $t = t'$. Estamos listos para mostrar que X y Y son gráficas equivalentes, y así X y Y son continuos homeomorfos.

Dados dos puntos diferentes de ramificación p y x en X , sea

$$\mathcal{A}(p, x) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ y } J \text{ une a } p \text{ con } x\}$$

y de manera similar, sea

$$\mathcal{A}'(p, x) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ y } L \text{ une a } k(p) \text{ con } k(x)\}.$$

Por la Afirmación 2, podemos elegir una biyección $k(p, x)$ desde $\mathcal{A}(p, x)$ sobre $\mathcal{A}'(p, x)$. Dado un punto de ramificación p de X , definamos

$$\mathcal{B}(p) = \{J : J \text{ es lazo de } X \text{ y } p \in J\},$$

$$\mathcal{B}'(p) = \{L : L \text{ es lazo de } Y \text{ y } k(p) \in J\}$$

y finalmente

$$\mathcal{C}(p) = \{J : J \text{ es una arista de } X \text{ que une a } p \text{ con un punto final de } X\}$$

y

$\mathcal{C}'(p) = \{L : L \text{ es una arista de } Y \text{ que une a } k(p) \text{ con un punto final de } Y\}$.

Por la Afirmación 4, es posible elegir biyecciones $k_1(p) : \mathcal{B}(p) \rightarrow \mathcal{B}'(p)$ y $k_2(p) : \mathcal{C}(p) \rightarrow \mathcal{C}'(p)$.

Sea $\mathcal{S}(X)$ ($\mathcal{S}(Y)$, respectivamente) el conjunto de aristas de X (Y , respectivamente). Así, variando los puntos p y x obtenemos conjuntos disjuntos $\mathcal{A}(p, x)$, $\mathcal{B}(p)$ y $\mathcal{C}(p)$ y la unión de todos ellos es $\mathcal{S}(X)$, podemos definir una extensión común, $K : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$, de todas las funciones de la forma $k(p, x)$, $k_1(p)$ y $k_2(p)$, donde K es una biyección.

Sea $\mathcal{V}(X)$ (respectivamente $\mathcal{V}(Y)$) el conjunto de vértices de X (respectivamente Y). Ahora, extenderemos la función k (definida en los puntos de ramificación de X) para $\mathcal{V}(X)$. Dado un punto final de X , existe una arista J de X que une a x con un punto de ramificación p de X . Entonces $K(J)$ contiene exactamente un punto final y de Y . Entonces definamos $k(x) = y$. Por tanto k es una biyección.

Por lo que se tiene definido $K : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ y una biyección $k : \mathcal{V}(X) \rightarrow \mathcal{V}(Y)$ tal que $p \in J$ si y sólo si $k(p) \in K(J)$ y para cada lazo L de X , $K(L)$ es un lazo en Y .

Esto prueba que las gráficas X y Y son isomorfos como gráficas, es decir, encontramos una función biyectiva entre los conjuntos de vértices de las gráficas que preserva la relación de adyacencia. Por tanto X es homeomorfo a Y . ■

Teorema 4.3.8. *Sea X un arco o una curva cerrada simple. Sean Y una gráfica finita y $n \in \{2, 3\}$. Supongamos que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración: Como X no contiene puntos de ramificación, $R(X) = \emptyset$. Sea $h : F_n(X) \rightarrow F_n(Y)$ un homeomorfismo. Entonces $h(\mathcal{E}_n(X)) = \mathcal{E}_n(Y)$. Por el Lema 4.3.1, $F_n(X) = \mathcal{E}_n(X)$. Por el Lema 4.1.3, Y no contiene puntos de ramificación. Así, Y es un arco o una curva cerrada. Si X es un arco, entonces $F_2(X)$ es homeomorfo a una 2-celda y $F_3(X)$ es homeomorfo a una 3-celda. Si X es una curva cerrada simple, entonces $F_2(X)$ es homeomorfo a una banda de Möbius y $F_3(X)$ es homeomorfo a una esfera tridimensional en \mathbb{R}^4 (Véase [3]). Por el homeomorfismo entre los espacios, el teorema queda demostrado. ■

Corolario 4.3.9. *Sean X y Y gráficas finitas. Supóngase que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$. Entonces X es homeomorfo a Y .*

Demostración: Por los Teoremas 4.2.6, 4.3.7 y 4.3.8 se tiene que si X y Y son gráficas finitas y $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Y)$ con $n \in \mathbb{N}$, entonces X es homeomorfo a Y . ■

Dado ya un recorrido, describiendo propiedades para conjuntos, representativos, dentro de las gráficas. Finalmente se ha logrado, llegar al resultado, el cual implica el propósito principal de este trabajo, probar que las gráficas finitas tienen producto simétrico único. El resultado se muestra a continuación.

Corolario 4.3.10. *Sea X una gráfica finita y Z un continuo. Supongamos que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Z)$. Entonces X es homeomorfo a Z .*

Demostración: Dado que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_n(Z)$ y X es una gráfica finita, por el Corolario 4.1.5, tenemos que Z es una gráfica finita. Por el Corolario 4.3.9, se concluye que X es homeomorfo a Z . ■

A partir de este resultado, podríamos considerar la siguiente pregunta: ¿Existen una gráfica finita X , un continuo Z y números $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $F_n(X)$ es homeomorfo a $F_m(Z)$ y $m > 1$, pero X no sea homeomorfo a Z ?

Por el Corolario 4.3.9, si tales continuos existieran, entonces $m \neq n$, además Z es un continuo de Peano y todo subconjunto abierto, no vacío de Z tiene dimensión mayor que 1. En efecto, ya que Z contiene arcos $F_m(Z)$ contiene m -celdas. Por la demostración del Teorema 3.1 de [5] y el Teorema 4.1.7, cada subcontinuo abierto no vacío de $F_n(X)$ es n -dimensional. Así, $m < n$. Entonces existe un subconjunto abierto de Z de dimensión 1, por lo que existe (nuevamente por la demostración del Teorema 3.1 de [5]) un subconjunto abierto, no vacío U de $F_m(Z)$ tal que $\dim(U) \leq m$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto todo subconjunto abierto no vacío de Z tiene dimensión mayor que 1.

Bibliografía

- [1] G. Acosta, *Continua with unique hyperspace*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 230, Marcel Dekker, Inc., New York, 2002, 33-49.
- [2] K. Borsuk y S. Ulam, *On symmetric products of topological spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (1931), 875-882.
- [3] R. Bott, *On the third symmetric potency of S_1* , Fund. Math. 39 (1952), 364-368.
- [4] E. Castañeda y A. Illanes, *Finite graphs have unique symmetric products*, Topology Appl. 153 (2006), 1434-1450.
- [5] D.W. Curtis y N.T. Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces*, Topology Appl. 19 (1985), 251-260.
- [6] R. Duda, *On the hyperspace of subcontinua of a finite graph*, I, Fund. Math. 69 (1970), 207-211.
- [7] A. Illanes, *Chainable continua are not C -determined*, Topology Appl. 98 (1997), 211-216.
- [8] A. Illanes, *Fans are not C -determined*, Colloq. Math. 81 (1999), 299-308.
- [9] A. Illanes, *Hiperespacios de continuos*, Aportaciones Matemáticas 28, Sociedad Matemática Mexicana (2004).
- [10] S. Macías, *On C -determined continua*, Glasnik Mat. Ser. III 32 (52) (1997), 259- 262.

- [11] S.B. Nadler, Jr., *Continuum Theory, An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 158, Marcel Dekker, New York, 1992.
- [12] S.B. Nadler, Jr., *Dimension Theory; An Introduction with exercises*, Aportaciones Matemáticas 18, Sociedad Matemática Mexicana (2002).
- [13] S.B. Nadler, Jr., *Hyperspace of sets: A Text with Research Questions*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., Vol. 49, Marcel Dekker, New York, 1978.